Solution :

Problème 4 de la deuxième journée du concours de sélection de l'équipe de Moldavie de 2011, paru dans Crux Mathematicorum ici : [2011 :496]. Nous présentons la solution d'Oliver Geupe, parue dans [2013 :77–78], sous une forme modifiée.

À tout moment, il y a au tableau 20 nombres compris entre 1 et 20. Puisque chaque coup consiste à choisir deux nombres a, b et à les remplacer par deux autres nombres $a+1, b-1$ ayant la même somme,

$$(a+1)+(b-1)=a+b\,,$$

la somme des nombres inscrits au tableau ne change jamais. En particulier, à tout moment, la moyenne des vingt nombres inscrits au tableau est

$$10.5\,.$$

Considérons maintenant la liste des nombres inscrits au tableau après un certain nombre de coups. À toute telle liste, associons un état $S=(s_1, s_2, \ldots, s_{20})$, où s_k représente le nombre de fois que le nombre k apparaît au tableau.

Nous avons clairement

$$s_j \geq 0 \qquad \forall\, 1 \leq j \leq 20,$$
$$s_1 + \ldots + s_{20} = 20\,.$$

L'état initial est

$$S_0 = (1, 1, \ldots, 1)\,.$$

Définissons maintenant la valeur $f(S)$ de l'état S par

$$f(S) = s_1 + 4s_2 + 9s_3 + 16s_4 + \ldots + 400s_{20} = \sum_{k=1}^{20} k^2 \cdot s_k\,,$$

qui est la somme des carrés de tous les nombres inscrits au tableau.

Si l'on peut passer de l'état S à l'état T en choisissant $a \leq b-2$ et en remplaçant a, b par $a+1$ et $b-1$, alors

$$f(S) - f(T) = a^2 + b^2 - \big((a+1)^2 + (b-1)^2\big) = 2b - 2a - 2\,.$$

Puisque $b - a \geq 2$, nous obtenons

$$f(S) - f(T) \geq 2,$$

avec égalité si et seulement si $a+2=b$.

Cela montre qu'après chaque coup, la valeur de l'état diminue d'au moins 2. Puisque $f(T) \geq 0$ pour tout état T, toute suite de coups doit finir par s'arrêter.

Considérons maintenant une suite d'états $S_0, S_1, \ldots, S_n$ correspondant à une suite de coups qui se termine. Nous pouvons facilement déterminer l'état final S_n.

Puisque le processus se termine à l'état S_n, on ne peut trouver au tableau deux nombres a, b tels que $a+2 \leq b$. Cela signifie que tous les nombres inscrits au tableau sont égaux, ou qu'ils ne prennent que deux valeurs consécutives.

Puisque la moyenne des nombres inscrits au tableau est toujours 10.5 et que, dans l'état final, les nombres ne prennent qu'une ou deux valeurs consécutives, tous les nombres de l'état final doivent être égaux à 10 ou à 11. De plus, puisque leur moyenne est exactement 10.5, il doit y avoir au tableau, dans l'état final, dix nombres égaux à 10 et dix nombres égaux à 11.

Par conséquent, l'état final est

$$S_n = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{9}, 10, 10, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{9}) .$$

Déterminons une borne supérieure pour n. Considérons une suite quelconque de coups $S_0, S_1, \ldots, S_n$. En effectuant éventuellement des coups supplémentaires, nous pouvons supposer sans perte de généralité que S_n est un état terminal, puisque nous cherchons une borne supérieure.

Alors,

$$\begin{aligned} f(S_0) - f(S_1) &\geq 2, \\ f(S_1) - f(S_2) &\geq 2, \\ &\ldots\ldots \\ f(S_{n-1}) - f(S_n) &\geq 2 . \end{aligned}$$

En additionnant ces inégalités, nous obtenons

$$f(S_0) - f(S_n) \geq 2n .$$

Puisque l'état initial est $S_0 = (1, 1, \ldots, 1)$, nous avons

$$f(S_0) = 1 + 2^2 + \ldots + 20^2 = 2870 .$$

De même, puisque l'état final est

$$S_n = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{9}, 10, 10, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{9}),$$

nous avons

$$f(S_n) = 10 \cdot 10^2 + 10 \cdot 11^2 = 2210 .$$

En particulier,

$$2n \leq f(S_0) - f(S_n) = 2870 - 2210 = 660 .$$

Nous obtenons ainsi la borne supérieure

$$n \leq 330 .$$

Pour achever la démonstration, montrons que 330 coups sont effectivement possibles.

Pour obtenir $n = 330$, il faut avoir $f(S_0) - f(S_n) = 2n$, ce qui n'est possible que si

$$f(S_0) - f(S_1) = f(S_1) - f(S_2) = \ldots = f(S_{n-1}) - f(S_n) = 2,$$

ou, de manière équivalente, si à chaque coup nous choisissons des entiers a, b satisfaisant $a + 2 = b$.

Par conséquent, pour montrer que $n = 330$ est réalisable, nous devons trouver une suite de coups dans laquelle, à chaque étape, une paire (a, b) satisfaisant $b = a + 2$ est remplacée par $(a + 1, b - 1)$.

Introduisons la notation abrégée $\to_a$ pour désigner un coup avec $b = a + 2$.

Alors, la suite de coups suivante permet de passer de

$$S_0 = (\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{20})$$

à

$$S_n = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{9}, 10, 10, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{9})$$

en n'utilisant que de tels coups :

$$\begin{aligned}
&(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{20}) \to_1 \to_2 \cdots \to_{18} (0, 2, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{16}, 2, 0) \\
&\qquad (\to_2 \to_3 \cdots \to_{17})^2 (0, 0, 3, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{14}, 3, 0, 0) \\
&\qquad (\to_3 \to_4 \cdots \to_{16})^3 (0, 0, 0, 4, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{12}, 4, 0, 0, 0) \\
&\qquad \ldots \\
&\qquad (\to_8 \to_9 \to_{10} \to_{11})^8 (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{8}, 9, 1, 1, 9, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{8}) \\
&\qquad (\to_9 \to_{10})^9 (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{9}, 10, 10, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{9}) .
\end{aligned}$$

Il s'agit donc d'une suite de 330 coups. Par conséquent, le nombre maximal de coups possibles est

$$330.$$

Note de la rédaction : Plus généralement, Geupel a montré que, si l'on commence avec les nombres $1, 2, \ldots, n$ inscrits au tableau, le nombre maximal de coups possibles est

$$\frac{1}{6} \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil n .$$

Essayez de démontrer ce résultat.