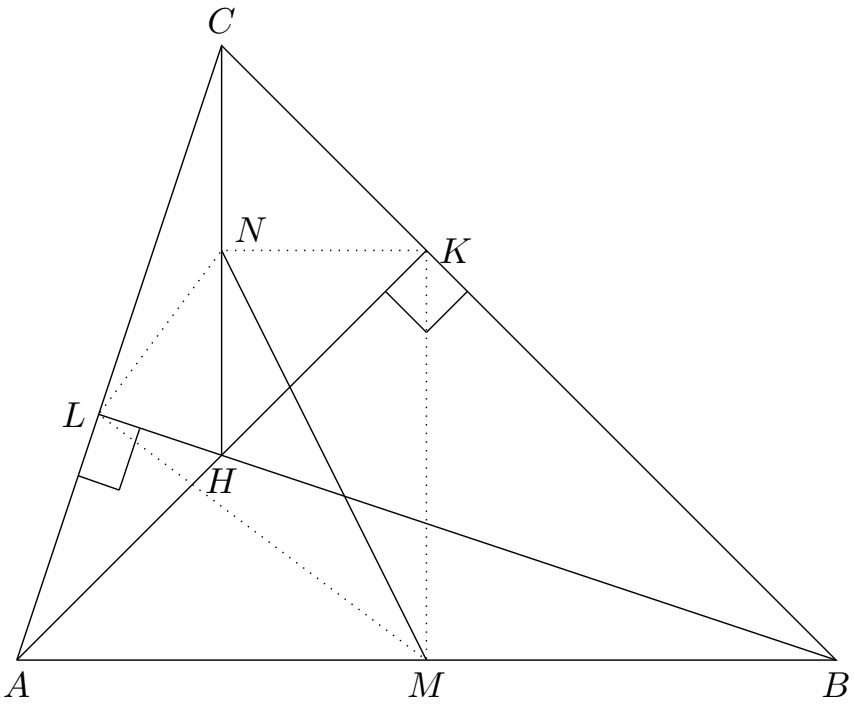
Solution :

Problème K3 de la 54e Olympiade mathématique tchèque 2004/05, catégorie B (10e année), paru dans Crux Mathematicorum ici : [2008 :343]. Nous présentons la solution d'Amengual Covas, parue dans [2009 :502].

Soit N le milieu de HC. Il suffit de montrer, de manière équivalente, que MN est la bissectrice de l'angle $\angle KML$.



Dans ce qui suit, nous utiliserons le fait bien connu suivant : si le triangle $\triangle XYZ$ est rectangle en X et si W est le milieu de YZ, alors W est le centre du cercle passant par X, Y et Z. En particulier,

$$XW = YW = ZW.$$

Si vous ne connaissez pas ce résultat, essayez de le démontrer.

Puisque $\angle ALB = 90°$ et que M est le milieu de AB, nous avons

$$AM = MB = LM\,.$$

De même, puisque $\angle AKB = 90°$ et que M est le milieu de AB, nous avons

$$AM = MB = KM\,.$$

Par conséquent,

$$LM = KM\,.$$

En appliquant le même argument à $\angle CKH = \angle CLH = 90°$ et en utilisant le fait que N est le milieu de CH, nous obtenons

$$KN = CN = LN\,.$$

Par conséquent, nous avons

$$\begin{cases} NK &= NL \\ MK &= ML \\ MN &= MN \end{cases}$$

Cela montre que les triangles $\triangle NKM$ et $\triangle LMN$ sont congruents et, par conséquent,

$$\angle LMN = \angle KMN\,.$$

Cela démontre le résultat.