

Solution :

Problème 1 du concours de sélection de l'équipe d'Italie, paru dans Crux Mathematicorum ici : [2002 :356]. Nous présentons la solution d'Edward T. H. Wang, parue dans [2004 :491], sous une forme légèrement modifiée.

Supposons, par l'absurde, qu'il existe un nombre premier p , un entier $n \geq 2$ et un entier x tels que

$$x^n = 2^p + 3^p.$$

Remarquons d'abord que $p \neq 2$, car sinon nous aurions

$$x^n = 13,$$

ce qui n'admet aucune solution entière x lorsque $n \geq 2$.

Par conséquent, $p = 2m + 1$ est un entier impair.

Alors

$$x^n = 2^{2m+1} + 3^{2m+1} = (2+3)(2^{2m} - 2^{2m-1}3 + 2^{2m-2}3^2 + \dots + 3^{2m}).$$

Cela montre que 5 divise x^n . Puisque 5 est premier, 5 divise x . Ainsi, $x = 5y$ pour un certain entier y .

Il s'ensuit que

$$5^{n-1}y^n = 2^{2m} - 2^{2m-1} \cdot 3 + 2^{2m-2} \cdot 3^2 + \dots + 3^{2m}.$$

Puisque $n \geq 2$, il s'ensuit que

$$2^{2m} - 2^{2m-1} \cdot 3 + 2^{2m-2} \cdot 3^2 + \dots + 3^{2m}$$

est divisible par 5. Ainsi, 5 divise

$$2^{2m} - 2^{2m-1} \cdot (5-2) + 2^{2m-2} \cdot (5-2)^2 + \dots + (5-2)^{2m} = \sum_{j=0}^{2m} (-1)^j 2^{2m-j} \cdot (5-2)$$

Un calcul simple montre que, pour tout $0 \leq j \leq 2m$, nous avons

$$(-1)^j 2^{2m-j} \cdot (5-2)^j = \text{un multiple de } 5 + 2^{2m}.$$

Par conséquent,

$$2^{2m} - 2^{2m-1} \cdot (5-2) + 2^{2m-2} \cdot (5-2)^2 + \dots + (5-2)^{2m} = \text{un multiple de } 5 + (2m$$

Puisque cette expression est divisible par 5, il s'ensuit que

$$2^{2m}(2m+1) = 2^{2m}p$$

est divisible par 5, et donc que $p = 5$.

Cela implique que

$$x^n = 2^5 + 3^5 = 275 = 5^2 \cdot 11,$$

ce qui contredit le fait que x et n sont des entiers et que $n \geq 2$.

Nous avons donc obtenu une contradiction, et notre hypothèse selon laquelle l'équation admet une solution entière x est fausse.

Cela achève la démonstration.