

Solution :

Problème 1 de la 15e Olympiade mathématique des Balkans de 1998, paru dans Crux Mathematicorum ici : [2001 :357]. Nous présentons la solution de Mohammed Aassila, parue dans [2003 :499–500].

Nous observons d'abord que

$$\frac{(n+1)^2}{1998} - \frac{n^2}{1998} = \frac{2n+1}{1998} \begin{cases} < 1, & \text{si } n \leq 998, \\ > 1, & \text{si } n \geq 999. \end{cases}$$

Cela implique que, pour tout $1 \leq n \leq 998$, nous avons

$$x_{n+1} = \left\lfloor \frac{(n+1)^2}{1998} \right\rfloor \leq \frac{(n+1)^2}{1998} < \frac{n^2}{1998} + 1 \leq \left(\left\lfloor \frac{n^2}{1998} \right\rfloor + 1 \right) + 1 = x_n + 2.$$

Par conséquent, lorsque $1 \leq n \leq 998$, nous avons $x_{n+1} - x_n < 2$. Puisque $x_{n+1} - x_n$ est un entier, nous obtenons $x_{n+1} - x_n \leq 1$, et donc

$$x_n \leq x_{n+1} \leq x_n + 1 \quad \forall 1 \leq n \leq 998.$$

Cela signifie que, dans cet intervalle, la suite x_n ne « saute » aucune valeur entière.

Puisque

$$x_1 = \left\lfloor \frac{1}{1998} \right\rfloor = 0,$$

$$x_{999} = \left\lfloor \frac{999^2}{1998} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{999}{2} \right\rfloor = 499,$$

la suite x_n doit prendre toutes les valeurs entières de 0 à 499, inclusivement, lorsque $1 \leq n \leq 999$.

Ensuite, pour tout $n \geq 999$, nous avons

$$\frac{(n+1)^2}{1998} - \frac{n^2}{1998} > 1.$$

Par conséquent,

$$x_n = \left\lfloor \frac{n^2}{1998} \right\rfloor \leq \frac{n^2}{1998} < \frac{(n+1)^2}{1998} - 1 < \left(\left\lfloor \frac{(n+1)^2}{1998} \right\rfloor + 1 \right) - 1 = x_{n+1}.$$

Il s'ensuit que, pour $999 < n \leq 1997$, les valeurs de x_n sont toutes distinctes.

Ainsi, au total, la suite x_n prend

$$500 + 998 = 1498$$

valeurs distinctes.