

Solution :

Problème 11 du 19e concours par équipes de Lituanie, paru dans Crux Mathematicorum ici : [2008 :284]. Nous présentons la solution de George Apostolopoulos, parue dans [2009 :300], modifiée par le comité de rédaction.

Soient $a_1, a_2, \dots, a_n$ des entiers positifs tels que

$$a_1 + \dots + a_n = 2004.$$

Nous cherchons à maximiser

$$P = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n.$$

Remarquons d'abord que, puisque $a_1, \dots, a_n \geq 1$, nous avons

$$2004 = a_1 + \dots + a_n \geq n.$$

Par conséquent,

$$1 \leq n \leq 2004.$$

Pour chaque $1 \leq n \leq 2004$, posons

$$T_n := \{(a_1, \dots, a_n) : a_1, \dots, a_n \text{ sont des entiers positifs et } a_1 + \dots + a_n = 2004\}.$$

Soit

$$T := \bigcup_{n=1}^{2004} T_n.$$

Il est clair que

$$T_n \subseteq \{(a_1, \dots, a_n) : 1 \leq a_j \leq 2004 \quad \forall j\}$$

et donc que T_n est fini. Il s'ensuit que T est un ensemble fini.

Puisque T est fini, l'ensemble

$$S = \{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n : (a_1, \dots, a_n) \in T\}$$

des produits des éléments des suites appartenant à T est lui aussi fini. En particulier, S possède un plus grand élément.

Cela montre qu'il existe un élément $(a_1, \dots, a_n) \in T$ dont le produit est maximal.

Considérons un tel élément $(a_1, \dots, a_n)$.

Nous allons maintenant montrer qu'il existe un élément, éventuellement différent, de T dont le produit est maximal et dont tous les termes sont égaux à 2 ou à 3.

Tout d'abord, il est facile de voir qu'aucun des nombres $a_1, a_2, \dots, a_n$ ne peut être égal à 1.

En effet, si $a_i = 1$ pour un certain i , alors, en choisissant un autre terme a_j avec $j \neq i$ et en remplaçant la paire (a_i, a_j) par le seul nombre $a_i + a_j = a_j + 1$, nous

obtiendrions un autre élément de T dont le produit serait plus grand, ce qui est impossible. Par conséquent, aucun des nombres $a_1, a_2, \dots, a_n$ ne peut être égal à 1.

Ensuite, si $a_k \geq 4$ pour un certain k , nous pouvons remplacer a_k par les deux nombres 2 et $a_k - 2$. Puisque

$$2 \cdot (a_k - 2) \geq a_k,$$

cette opération ne peut pas diminuer le produit. Comme le produit initial était maximal, le nouveau produit doit lui aussi être maximal.

Ainsi, si $a_k \geq 4$ pour un certain k , cette opération produit un nouvel élément de T dont le produit est maximal, dans lequel un nombre $a_k \geq 4$ est remplacé par deux nombres plus petits, tandis que tous les autres nombres demeurent inchangés. Puisque ce processus ne peut pas se poursuivre indéfiniment [par exemple, chaque fois que nous l'appliquons, la somme $\sum_{a_k \geq 4} a_k$ diminue], en le répétant jusqu'à ce qu'il ne soit plus possible de le faire, nous obtenons un élément $(b_1, b_2, \dots, b_m) \in T$ dont le produit est maximal et tel que, pour tout $1 \leq j \leq m$,

$$2 \leq b_j \leq 3.$$

Enfin, remarquons qu'au plus deux des nombres $b_1, b_2, \dots, b_m$ peuvent être égaux à 2. En effet, s'il y avait au moins trois 2 parmi les b_j , alors, puisque

$$2 + 2 + 2 = 3 + 3,$$

$$2 \cdot 2 \cdot 2 < 3 \cdot 3,$$

nous pourrions remplacer trois 2 par deux 3 et obtenir un élément de T dont le produit serait plus grand, ce qui est impossible.

Cela montre qu'il existe un certain $r \in \{0, 1, 2\}$ tel qu'exactly r des nombres $b_1, b_2, \dots, b_m$ soient égaux à 2, les $m - r$ autres étant égaux à 3.

Il s'ensuit que

$$3 \cdot 668 = 2004 = b_1 + \dots + b_m = 2r + 3(m - r).$$

Cela implique que $2r$ est un multiple de 3, et donc que $r = 0$. Par conséquent,

$$m = 668.$$

Ce qui précède montre que l'élément

$$\underbrace{(3, 3, \dots, 3)}_{668}$$

est l'un des éléments dont le produit est maximal. Par conséquent, la plus grande valeur possible du produit est

$$P = 3^{668}.$$

Note de la rédaction : En lisant très attentivement la solution, on peut montrer que $\underbrace{(3, 3, \dots, 3)}_{668}$ est le seul élément de T dont le produit est maximal. En fait,

si 2024 est remplacé par un entier positif $n > 1$, on peut montrer que :

- Si le reste de la division de n par 3 est 0 ou 2, alors il existe un unique élément de T dont le produit est maximal.

- Si le reste de la division de n par 3 est 1, alors il existe exactement deux éléments de T dont le produit est maximal.

Essayez de démontrer ces deux affirmations.