

Solution : Problème 3 de la catégorie junior de l'Olympiade nationale d'Azerbaïdjan de 2015, paru dans Crux Mathematicorum ici : [2016 :202]. Nous présentons la solution de Pedro Acosta, parue dans [2017 :287], modifiée par le comité de rédaction.

Remarquons d'abord que le polynôme nul satisfait la relation donnée.

Déterminons maintenant toutes les solutions non nulles. Soit $P(X)$ un polynôme non nul et posons $d = \deg(P)$. Alors

$$d^2 = \deg(P(P(X))) = \deg((X^2 + X + 1) \cdot P(X)) = d + 2.$$

En résolvant cette équation, nous obtenons $d = 2$ ou $d = -1$. Puisque $d = \deg(P) \geq 0$, nous avons $d = 2$.

Il existe donc $a, b, c \in \mathbb{R}$, avec $a \neq 0$, tels que

$$P(X) = aX^2 + bX + c.$$

L'équation donnée devient alors

$$aP(X)^2 + bP(X) + c = (X^2 + X + 1) \cdot P(X),$$

et par conséquent $P(X)$ doit diviser c . Cela implique que $c = 0$.

Ainsi,

$$(aP(X) + b) \cdot P(X) = (X^2 + X + 1) \cdot P(X).$$

Puisque $P(X)$ est un polynôme non nul, nous pouvons diviser par $P(X)$ et obtenir

$$aP(X) + b = X^2 + X + 1.$$

En nous rappelant que

$$P(X) = aX^2 + bX,$$

nous obtenons

$$X^2 + X + 1 = a(aX^2 + bX) + b = a^2X^2 + abX + b.$$

Cela donne

$$\begin{cases} a^2 &= 1, \\ ab &= 1, \\ b &= 1, \end{cases}$$

et donc $a = b = 1$. Ainsi,

$$P(X) = X^2 + X.$$

Vérifions que ce polynôme satisfait bien l'équation donnée. En effet,

$$\begin{aligned}P(P(X)) &= P(X)^2 + P(X) \\&= (X^2 + X)^2 + (X^2 + X) \\&= (X^2 + X)(X^2 + X + 1) \\&= (X^2 + X + 1) \cdot P(X).\end{aligned}$$

Par conséquent, les seuls polynômes satisfaisant l'équation donnée sont

$$P_1(X) = 0 \quad \text{et} \quad P_2(X) = X^2 + X.$$