

Solution :

Problème 6 du concours de mathématiques des Maritimes de 2003, paru dans Crux Mathematicorum ici : [2003 :354]. Nous présentons la solution officielle parue dans [2004 :324] sous une forme légèrement modifiée.

Nous montrons d'abord que $n \leq 3$.

Supposons, par l'absurde, qu'il existe des entiers positifs m, n avec $n \geq 4$ satisfaisant l'équation donnée.

Puisque $n \geq 4$, le nombre $n!$ est un multiple de 4. Par conséquent,

$$m^2 - 3 = 11 \cdot n! + 2000$$

est un multiple de 4. Il existe donc un entier k tel que

$$m^2 - 3 = 4k.$$

Cela implique que m est impair. Il existe donc un entier l tel que $m = 2l + 1$, ce qui donne

$$4k = m^2 - 3 = (2l + 1)^2 - 3 = 4l^2 + 4l - 2 \implies 2 = 4(l^2 + l - k),$$

ce qui constitue une contradiction.

Il s'ensuit que notre hypothèse selon laquelle $n \geq 4$ est fausse. Par conséquent, $n \leq 3$.

Examinons maintenant les trois cas $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$.

Lorsque $n = 1$, nous avons

$$m^2 = 2003 + 11 = 2014,$$

qui n'est pas un carré parfait, puisque 2014 est pair et n'est pas divisible par 4.

Lorsque $n = 2$, nous avons

$$m^2 = 2003 + 22 = 2025 = 25 \cdot 81 = (5 \cdot 9)^2 = 45^2,$$

qui est un carré parfait.

Lorsque $n = 3$, nous avons

$$m^2 = 2003 + 66 = 2069,$$

qui n'est pas un carré parfait, puisque

$$45^2 = 2025 < 2069,$$

$$46^2 = (45 + 1)^2 = 45^2 + 90 + 1 = 2116 > 2069.$$

Il s'ensuit que la seule paire est

$$(m, n) = (45, 2).$$