P1. Soient $a, b \geq 2$ des entiers premiers entre eux. Soit S l'ensemble des points du plan à coordonnées entières situés strictement à l'intérieur du triangle de sommets $(0, 0)$, $(a, 0)$ et $(0, b)$. Déterminez, avec preuve,

$$\sum_{(x,y)\in S} (a-2x)(b-2y)$$

en fonction de a et b.

Remarque : Ici, la sommation signifie que l'on additionne la valeur $(a-2x)(b-2y)$ pour tous les points (x, y) appartenant à S.

Solution 1

Pour simplifier, posons $f(x, y) = (a-2x)(b-2y)$. Soit R la région du plan constituée des points du réseau (x, y) tels que $1 \leq x \leq a-1$ et $1 \leq y \leq b-1$. Alors S est l'ensemble des points du réseau de R situés en dessous de la droite $x/a + y/b = 1$. Soit T l'ensemble des points du réseau de R qui ne sont pas dans le triangle rectangle susmentionné et qui se trouvent strictement au-dessus de la droite $x/a + y/b = 1$.

Puisque a et b sont premiers entre eux, la droite $x/a + y/b = 1$, c'est-à-dire la droite $bx + ay = ab$, ne contient aucun point du réseau vérifiant $1 \leq x \leq a-1$ et $1 \leq y \leq b-1$. En effet, $bx + ay = ab$ implique que $b \mid ay$, donc $b \mid y$ par coprimalité, ce qui contredit $1 \leq y \leq b-1$. Par conséquent, R est la réunion disjointe de S et T.

Sur R, on a alors

$$\begin{aligned}
\sum_{(x,y)\in R} f(x,y) &= \left(\sum_{x=1}^{a-1}(a-2x)\right)\left(\sum_{y=1}^{b-1}(b-2y)\right) \\
&= \left(a(a-1) - 2\cdot\frac{a(a-1)}{2}\right)\left(b(b-1) - 2\cdot\frac{b(b-1)}{2}\right) \\
&= 0\cdot 0 = 0.
\end{aligned}$$

Cependant, l'application $F(x, y) = (a-x, b-y)$ est une bijection de S sur T. En effet, T est constitué des points du réseau de R situés au-dessus de la droite $x/a + y/b = 1$, S est constitué de points de réseau de R situés au-dessus de cette droite, et $x/a + y/b < 1$ si et seulement si

$$f(F(x,y)) = (a-2(a-x))(b-2(b-y)) = (2x-a)(2y-b) = (a-2x)(b-2y) = f(x,y).$$

Ainsi,

$$\sum_{(x,y)\in S} f(x,y) = \sum_{(x,y)\in T} f(x,y).$$

© 2026 Société mathématique du Canada

En combinant avec

$$0 = \sum_{(x,y)\in R} f(x,y) = \sum_{(x,y)\in S} f(x,y) + \sum_{(x,y)\in T} f(x,y)$$

on obtient

$$\sum_{(x,y)\in S} f(x,y) = 0$$

comme voulu.

Solution 2

Posons

$$T = \sum_{(x,y)\in S} (a-2x)(b-2y).$$

On montre que $T = 0$ en divisant le grand triangle en deux régions plus petites à l'aide de la médiane issue de $(0,0)$ vers le milieu $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ de l'hypoténuse. Cette médiane est la droite

$$y = \frac{b}{a}x.$$

Comme a et b sont premiers entre eux et supérieurs ou égaux à 2, il n'existe aucun point du réseau sur le segment ouvert reliant $(0,0)$ à $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$: en effet, si un point entier (x,y) appartenait à ce segment, on aurait alors $ay = bx$, et comme $\mathrm{pgcd}(a,b) = 1$, cela impliquerait $a \mid x$ et $b \mid y$, ce qui est impossible pour un point strictement situé entre les extrémités. Ainsi, tout point du réseau de S se trouve strictement d'un côté ou de l'autre de cette médiane.

Écrivons $S = S_1 \sqcup S_2$, où S_1 désigne l'ensemble des points du réseau de S situés en dessous de la médiane et S_2 celui des points du réseau de S situés au-dessus de la médiane. Commençons par considérer S_1. Si $(x,y) \in S_1$, alors $0 < y < \frac{b}{a}x$, et comme ce point appartient aussi au triangle initial, on a $x > 0$, $y > 0$ et $x < a - \frac{a}{b}y$. On réfléchit alors (x,y) horizontalement par rapport à la médiane de la tranche horizontale du triangle en l'envoyant sur $(a-x, y)$. Comme

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{a-x}{a} + \frac{y}{b} > \frac{y}{b},$$

et, comme (x,y) se situe en dessous de la médiane, on vérifie que $(a-x,y)$ se trouve dans la partie supérieure du triangle déterminée par le même niveau horizontal, tout en restant strictement à l'intérieur du triangle initial. Plus important encore, les deux termes correspondants s'annulent :

$$(a - 2(a-x))(b-2y) = (-a+2x)(b-2y) = -(a-2x)(b-2y).$$

Ainsi, les points appariés par $(x,y) \leftrightarrow (a-x,y)$ contribuent globalement pour zéro.

 © 2026 Société mathématique du Canada

De même, pour les points de S_2, on effectue un appariement vertical en envoyant (x, y) sur $(x, b-y)$. Cela envoie les points de la région de gauche sur les points correspondants de la région complémentaire situés sur la même droite verticale, et, là encore, les termes correspondants s'annulent puisque

$$(a-2x)(b-2(b-y)) = (a-2x)(-b+2y) = -(a-2x)(b-2y).$$

Les seuls points de S qui ne peuvent être appariés sont ceux situés sur les droites $x = \frac{a}{2}$ ou $y = \frac{b}{2}$, car ils se reflètent sur eux-mêmes. Mais $x = \frac{a}{2}$ et $y = \frac{b}{2}$ impliquent tous deux que $(a-2x)(b-2y) = 0$, de sorte que ces termes ne contribuent pas à la somme. Par conséquent, toute la somme s'annule sous l'appariement ci-dessus :

$$\sum_{(x,y)\in S} (a-2x)(b-2y) = 0.$$

Solution 3

Posons

$$T = \sum_{(x,y)\in S} (a-2x)(b-2y).$$

On calcule T en sommant sur les points du réseau colonne par colonne. Pour chaque entier x avec $1 \le x \le a-1$, les points de S ayant pour première coordonnée x sont exactement $(x,1), (x,2), \ldots, (x, m_x)$, où m_x désigne le plus grand entier tel que $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} < 1$. Comme l'hypoténuse du triangle est la droite $y = b - \frac{b}{a}x$, on a

$$m_x = \left\lfloor b - \frac{b}{a}x \right\rfloor.$$

Comme $\operatorname{pgcd}(a,b) = 1$, le nombre $\frac{bx}{a}$ n'est un entier pour aucun $x = 1, \ldots, a-1$, donc

$$m_x = b - 1 - \left\lfloor \frac{bx}{a} \right\rfloor.$$

Si l'on pose $n_x = \left\lfloor \frac{bx}{a} \right\rfloor$, alors $m_x = b - 1 - n_x$. La contribution de la x-ième colonne à la somme totale est donc

$$C_x = \sum_{y=1}^{m_x} (a-2x)(b-2y) = (a-2x)\sum_{y=1}^{m_x}(b-2y).$$

Or

$$\sum_{y=1}^{m_x}(b-2y) = m_x b - 2\cdot\frac{m_x(m_x+1)}{2} = m_x(b - m_x - 1),$$

et en substituant $m_x = b - 1 - n_x$, on obtient

$$\sum_{y=1}^{m_x}(b-2y) = (b-1-n_x)n_x.$$

Ainsi,

$$C_x = (a-2x)(b-1-n_x)n_x.$$

On compare maintenant les colonnes x-ième et $(a-x)$-ième colonnes. Comme

$$n_{a-x} = \left\lfloor \frac{b(a-x)}{a} \right\rfloor = \left\lfloor b - \frac{bx}{a} \right\rfloor = b - 1 - \left\lfloor \frac{bx}{a} \right\rfloor = b - 1 - n_x,$$

il s'ensuit que

$$(b-1-n_{a-x})n_{a-x} = n_x(b-1-n_x).$$

D'autre part,

$$a - 2(a-x) = -(a-2x).$$

Par conséquent,

$$C_{a-x} = (a-2(a-x))(b-1-n_{a-x})n_{a-x} = -(a-2x)(b-1-n_x)n_x = -C_x.$$

Ainsi, la contribution de la colonne x s'annule exactement avec celle de la colonne $a-x$. Par conséquent, toutes les colonnes s'annulent en paires. Si a est pair, la colonne centrale $x = \frac{a}{2}$ contribue de toute façon pour 0, puisque dans ce cas $a - 2x = 0$. Il s'ensuit que

$$\sum_{(x,y)\in S}(a-2x)(b-2y) = 0.$$

 © 2026 Société mathématique du Canada

P2. Il existe n types de pièces dans la mine d'or de Wario. Chaque pièce du i-ième type vaut d_i cents, où $d_1, \ldots, d_n$ sont des entiers positifs distincts. Un entier positif D est dit *chanceux* si la propriété suivante est satisfaite : pour tout entier positif k, toute collection de pièces (contenant un nombre arbitraire de pièces de chaque type) dont la valeur totale est exactement kD cents peut être partitionnée en k groupes, chacun d'une valeur de D cents. Un nombre chanceux existe-t-il nécessairement ?

Solution 1

La réponse est oui. On raisonne par récurrence sur k, en extrayant à répétition un groupe de valeur D parmi les pièces restantes ; le cas $k = 1$ est immédiat. Le problème est donc équivalent à l'étape de récurrence suivante :

Étant donnés des entiers positifs $d_1, \ldots, d_n$, existe-t-il un entier positif D tel que, chaque fois que des entiers $n_i \geq 0$ vérifient $\sum_i n_i d_i = mD$ pour un entier positif $m \geq 2$, il existe des entiers $0 \leq m_i \leq n_i$ tels que $\sum_i m_i d_i = D$?

Soit d un multiple commun de $d_1, \ldots, d_n$ (par exemple $d = d_1 \cdots d_n$ ou $d = \operatorname{ppcm}(d_1, \ldots, d_n)$). Nous affirmons que $D = Md$ convient pour un choix approprié de M. En effet, remarquons que toute collection de d/d_i copies de d_i peut être regroupée en une famille de nombres dont la somme vaut d. Il existe au moins

$$\sum_i \left\lfloor \frac{n_i}{d/d_i} \right\rfloor$$

de tels groupes ; il suffit donc de montrer que la quantité ci-dessus est au moins égale à M. Or, on a

$$\begin{aligned} \sum_i \left\lfloor \frac{n_i}{d/d_i} \right\rfloor &\geq \left(\sum_i \frac{n_i}{d/d_i} \right) - n \\ &= \left(\frac{1}{d} \sum_i n_i d_i \right) - n \\ &= mM - n \\ &\geq M + (M - n). \end{aligned}$$

Par conséquent, le choix $M = n$ convient comme souhaité.

Solution 2

On présente une solution modifiée, fondée sur la soumission de Perry Dai, qui montre que $D = d_1 \ldots d_n$ convient. Comme dans la Solution 1, nous raisonnons par récurrence sur k, le cas de base $k = 1$ étant trivial. Supposons donc que $k \geq 2$ et que $a_1 d_1 + \cdots + a_n d_n = kD$. Sans perte de généralité, supposons que $a_1 d_1 \geq a_2 d_2 \geq \ldots \geq a_n d_n$. Alors $a_1 d_1 \geq \frac{kD}{n} \geq \frac{2d_1 \ldots d_n}{n}$, d'où $a_1 \geq \frac{2d_2 \ldots d_n}{n}$.

Affirmation. On a $a_1 \geq d_i$ pour tout $2 \leq i \leq n$, à l'exception du cas où $n = 3$ et où $d_i = 1$ pour un certain $i \geq 2$.

Preuve de l'affirmation. Si $n \leq 2$ ou $n \geq 4$, alors

$$a_1 \geq \frac{2d_2 \dots d_n}{n} = d_i \cdot \frac{2}{n} \cdot \prod_{2 \leq j \leq n, j \neq i} d_j \geq d_i \cdot \frac{2}{n} \cdot (n-2)! \geq d_i.$$

Si $n = 3$ et qu'aucun des d_i n'est égal à 1, alors $a_1 \geq \frac{2d_2d_3}{3} \geq \frac{4}{3}d_i \geq d_i$. $\square$

Laissons de côté pour l'instant le cas $n = 3$ où l'un des d_i est égal à 1, et poursuivons en supposant que $a_1 \geq d_i$ pour tout $2 \leq i \leq n$.

Considérons une suite d'entiers non négatifs $x_1, \dots, x_n$ telle que $x_1d_1 + \dots + x_nd_n = D$ et $x_i \leq a_i$ pour tout $2 \leq i \leq n$, où l'on choisit x_1 minimal sous ces contraintes. Remarquons que $\frac{D}{d_1}, 0, \dots, 0$ satisfait les contraintes ci-dessus, de sorte qu'au moins une telle suite existe. Si l'on a également $x_1 \leq a_1$, alors $x_1, \dots, x_n$ correspond à un groupe de pièces d'une valeur de D cents. Supposons que ce ne soit pas le cas, de sorte que $x_1 > a_1$. Pour tout $2 \leq i \leq n$, remarquons que remplacer (x_1, x_i) par $(x_1 - d_i, x_i + d_1)$ ne modifie pas $x_1d_1 + \dots + x_nd_n$, conserve x_1 non négatif puisque $x_1 > a_1 \geq d_i$ d'après l'affirmation ci-dessus, et diminue x_1. Par minimalité de x_1, on doit donc avoir $x_i + d_1 > a_i$ pour tout $2 \leq i \leq n$, donc $x_i > a_i - d_1$. Alors,

$$D = \sum_{i=1}^{n} x_id_i = x_1d_1 + \sum_{i=2}^{n} x_id_i \geq (a_1+1)d_1 + \sum_{i=2}^{n}(a_i - d_1 + 1)d_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_id_i + \sum_{i=1}^{n} d_i - d_1 \sum_{i=2}^{n} d_i \geq 2D + \sum_{i=1}^{n} d_i - d_1 \sum_{i=2}^{n} d_i$$

$$\implies d_1 \sum_{i=2}^{n} d_i \geq D + \sum_{i=1}^{n} d_i > d_1 \left(1 + \prod_{i=2}^{n} d_i\right).$$

Nous soutenons que $1 + \prod_{i=2}^{n} d_i \geq \sum_{i=2}^{n} d_i$ pour tous entiers positifs distincts $d_2, \dots, d_n$, ce qui entraînerait une contradiction. Sans perte de généralité, on peut les réordonner de sorte que $d_2 < d_3 < \dots < d_n$, de sorte que $2 \leq d_i$ pour tout $3 \leq i \leq n$. Alors $(d_2 - 1)(d_3 \dots d_n - 1) \geq 0$ et $d_3 \dots d_n \geq d_3 + \dots + d_n$, d'où

$$1 + \prod_{i=2}^{n} d_i \geq d_2 + \prod_{i=3}^{n} d_i \geq d_2 + \sum_{i=3}^{n} d_i$$

comme voulu. Ceci achève la démonstration, à l'exception du cas où $n = 3$ et où l'un des d_i est égal à 1.

Dans le cas restant, supposons que les pièces aient pour valeurs $d_1, d_2, 1$. Si l'on dispose d'au moins d_2 pièces de valeur d_1, ou d'au moins d_1 pièces de valeur d_2, alors on peut

 © 2026 Société mathématique du Canada

extraire un groupe de valeur $D = d_1 d_2$. Sinon, la valeur totale des pièces de valeur d_1 et d_2 est $\leq d_1(d_2 - 1) + d_2(d_1 - 1) \leq kD - d_1 - d_2$, de sorte qu'il y a au moins $d_1 + d_2$ pièces de valeur 1. On peut former un groupe de D en prenant des pièces de valeur d_1 ou d_2 jusqu'à ce que toutes ces pièces soient épuisées, ou jusqu'à ce que l'ajout d'une pièce supplémentaire fasse dépasser D, puis en complétant avec des pièces de valeur 1.

P3. Turbo l'escargot joue à un jeu sur un plateau comportant $2n$ lignes et $2n$ colonnes. Il y a $2n^2$ monstres qui commencent par occuper $2n^2$ cases distinctes, avec la connaissance de Turbo. Après cela, Turbo choisit une case quelconque et l'étiquette 1. À partir de cette case, Turbo parcourt ensuite toutes les autres $4n^2 - 1$ cases exactement une fois, en les étiquetant successivement $2, 3, \ldots, 4n^2$. Turbo ne se déplace qu'entre des cases partageant un côté et ne revient jamais sur une case déjà visitée.

Le pointage final est la somme des étiquettes des cases contenant des monstres. Les monstres cherchent à se placer de manière à maximiser le pointage, tandis que Turbo cherche à le minimiser en fonction des positions des monstres. Déterminez, en fonction de n, le plus grand pointage que les monstres peuvent garantir.

Solution 1

Le pointage maximal que les monstres peuvent obtenir est $4n^4$. Celui-ci est atteint en se plaçant selon un motif en damier. On dira qu'une case est marquée si un monstre l'occupe, et vide sinon. Il est alors clair que le parcours de Turbo alternera entre cases marquées et cases vides. En partant d'une case marquée, le pointage est

$$1 + 3 + \cdots + (4n^2 - 1) = 4n^4.$$

Nous allons maintenant montrer que Turbo peut toujours obtenir un pointage au plus égal à $4n^4$, quelle que soit la position des monstres. Remarquons que, pour une grille $2n \times 2n$, il existe un cycle hamiltonien passant par toutes les cases. Considérons un monstre arbitraire et supposons qu'il se trouve sur la case 1. Considérons ensuite les deux parcours partant de cette case et suivant le cycle hamiltonien dans chaque direction. Pour tout monstre autre que celui situé sur la case 1, son indice dans l'un des parcours sera i et dans l'autre sera $4n^2 + 2 - i$. Ainsi, la somme des pointages de ces deux parcours est

$$\begin{aligned} 2 + \sum_{\text{monstre en } i} \big(i + 4n^2 + 2 - i\big) &= 2 + (2n^2 - 1)(4n^2 + 2) \\ &= 8n^4. \end{aligned}$$

Ainsi, l'un de ces deux parcours a un pointage au plus égal à $4n^4$.

Solution 2

Comme dans la solution précédente, les monstres peuvent se disposer selon un motif en damier afin d'atteindre une borne inférieure de $4n^4$. Nous allons maintenant montrer que toute autre configuration permet à Turbo d'obtenir un pointage au plus égal à $4n^4 - n^2$, ce qui est légèrement plus précis que dans la solution précédente.

 © 2026 Société mathématique du Canada

Comme précédemment, il existe un cycle hamiltonien. Si les monstres ne sont pas disposés en damier, il doit y avoir alors deux cases adjacentes de ce cycle qui sont toutes deux occupées par des monstres. Notons ces cases A et B. Nous allons considérer deux parcours suivant ce cycle. Le premier commence en A, passe ensuite par B, puis continue le long du cycle dans ce sens jusqu'à se terminer sur une case adjacente à A. De même, le second parcours commence en B, passe ensuite par A, puis continue jusqu'à se terminer sur une case adjacente à B.

Nous soutenons que les pointages des parcours, notés $S_{A\to B}$ et $S_{B\to A}$, ont pour somme $8n^4 - 2n^2$. Considérons n'importe lequel des $2n^2 - 2$ monstres qui ne se trouvent ni en A ni en B, et supposons qu'il occupe la position d'indice i dans le premier parcours. Alors, dans le second parcours, ce monstre sera rencontré à l'indice $4n^2 + 3 - i$. On obtient donc

$$\begin{aligned} S_{A\to B} + S_{B\to A} &= 6 + \sum_{\text{monstre en } i} \big(i + 4n^2 + 3 - i\big) \\ &= 6 + (2n^2 - 2)(4n^2 + 3) \\ &= 8n^4 - 2n^2. \end{aligned}$$

Ainsi, $\min(S_{A\to B}, S_{B\to A}) \le 4n^4 - n^2$, et il existe donc un parcours que Turbo peut emprunter pour obtenir un pointage $\le 4n^4 - n^2$.

© 2026 Société mathématique du Canada

P4. Une sphère de centre I est inscrite dans un tétraèdre $ABCD$. Supposons que l'angle entre deux faces quelconques de $ABCD$ soit aigu. Supposons de plus que

$$\frac{\mathrm{vol}(IABC)}{BC} = \frac{\mathrm{vol}(IACD)}{CD} = \frac{\mathrm{vol}(IADB)}{DB}.$$

Montrez que AI est perpendiculaire au plan BCD.

Remarque : Ici, $\mathrm{vol}(IABC)$ désigne le volume du tétraèdre $IABC$, et de même pour $IACD$ et $IADB$.

Solution 1

Soit K le point d'intersection de AI avec le plan BCD. On a

$$\frac{\mathrm{vol}(IABC)}{\mathrm{vol}(KABC)} = \frac{\mathrm{vol}(IACD)}{\mathrm{vol}(KACD)} = \frac{\mathrm{vol}(IADB)}{\mathrm{vol}(KADB)} = \frac{AI}{AK}.$$

De plus,

$$\frac{\mathrm{vol}(KABC)}{\mathrm{aire}(KBC)} = \frac{\mathrm{vol}(KACD)}{\mathrm{aire}(KCD)} = \frac{\mathrm{vol}(KADB)}{\mathrm{aire}(KDB)} = \frac{1}{3}\mathrm{dist}(A, BCD).$$

On en déduit que

$$\frac{\mathrm{aire}(KBC)}{BC} = \frac{\mathrm{aire}(KCD)}{CD} = \frac{\mathrm{aire}(KDB)}{DB}.$$

Ainsi, K est équidistant des trois côtés du triangle BCD. Comme K est à l'intérieur de BCD, on en conclut que K est le centre du cercle inscrit à BCD.

Remarquons maintenant que

$$\frac{\mathrm{vol}(IABC)}{BC} = \frac{1}{6}\mathrm{dist}(A, BC) \times \mathrm{dist}(I, ABC).$$

On en déduit que

$$\mathrm{dist}(A, BC) = \mathrm{dist}(A, CD) = \mathrm{dist}(A, DB).$$

Ainsi, si L désigne le pied de A sur BCD, alors, d'après le théorème de Pythagore, L est également équidistant des trois côtés de BCD. La condition d'angle aigu implique alors que L est aussi le centre du cercle inscrit à BCD. Par conséquent, $L = K = AI \cap BCD$, d'où $AI \perp BCD$, comme souhaité.

Solution 2

Comme dans la Solution 1, on définit L comme le pied de A sur le plan BCD, et l'on montre que L est le centre du cercle inscrit au triangle BCD. Observons maintenant

 © 2026 Société mathématique du Canada

que le plan ABL est précisément le plan contenant la droite BL perpendiculaire au plan BCD. Ainsi, la symétrie par rapport au plan ABL envoie la droite BC sur la droite BD, et par conséquent le plan ABC sur le plan ABD. Remarquons que le plan ABL contient également la droite AB. Ainsi, comme les angles dièdres du tétraèdre $ABCD$ sont aigus, le plan ABL doit être le plan passant par AB qui bissecte l'angle dièdre intérieur formé par les plans ABC et ABD. Ce plan coïncide avec le plan ABI, de sorte que I appartient au plan ABL.

En répétant cet argument pour les plans ACL et ADL, on obtient que I appartient à l'intersection des plans ABL, ACL et ADL, laquelle est précisément la droite AL. Ceci achève la démonstration.

© 2026 Société mathématique du Canada

P5. Pour chaque $n \geq 1$, déterminez le plus grand entier c_n pour lequel il existe un polynôme f de degré n à coefficients rationnels, un nombre irrationnel a, et c_n nombres rationnels distincts $a_1, a_2, \ldots, a_{c_n}$ tels que $f(a + a_i)$ soit un nombre rationnel pour tout $1 \leq i \leq c_n$.

Solution 1

La réponse est $c_n = n - 1$. Pour construire un polynôme montrant que $c_n \geq n - 1$, remarquons que si $a, x \in \mathbb{Q}$ et $n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$, alors $a(x + \sqrt{2})^n = c + d\sqrt{2}$ pour certains $c, d \in \mathbb{Q}$. Motivés par cette observation, considérons la résolution de l'équation

$$f(x + \sqrt{2}) - g(x) = (x - \sqrt{2})(x - 1)(x - 2) \cdots (x - (n - 1)),$$

pour $f(x), g(x) \in \mathbb{Q}[x]$ avec $\deg(f) = n$. En développant le membre de droite, celui-ci prend la forme $a(x) + b(x)\sqrt{2}$, pour certains polynômes $a(x), b(x) \in \mathbb{Q}[x]$ de degrés n et $n - 1$, respectivement.

En posant $f(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i x^i$ avec $f_i \in \mathbb{Q}$, on a

$$f(x + \sqrt{2}) = \sum_{i=0}^{n} f_i (x + \sqrt{2})^i = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} f_i x^j (\sqrt{2})^{i-j}.$$

La partie en $\sqrt{2}$ correspond aux termes pour lesquels $i - j$ est impair, et l'on obtient ainsi

$$\sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{\substack{i=j+1 \\ i \not\equiv j \pmod 2}}^{n} \binom{i}{j} 2^{(i-j-1)/2} f_i \right) x^j$$

En particulier, le coefficient de x^j est une combinaison linéaire de $f_{j+1}, f_{j+3}, \ldots$, chacun avec un coefficient non nul. Par conséquent, on peut choisir f_n de manière à faire correspondre le coefficient de x^{n-1} dans $b(x)$, puis f_{n-1} de manière à faire correspondre celui de x^{n-2} dans $b(x)$. En itérant à rebours, on choisit f_k pour $k \geq 1$ afin de faire correspondre le coefficient de x^{k-1} dans $b(x)$, et l'on pose $f_0 = 0$. Avec cette construction, tous ces termes sont éliminés, de sorte que $a(x) + b(x)\sqrt{2} - f(x + \sqrt{2}) \in \mathbb{Q}[x]$; notons ce polynôme $-g(x)$. Comme le degré de $b(x)$ est $n - 1$, on a $f_n \neq 0$, de sorte que $f(x)$ est bien un polynôme de degré n.

Ce polynôme convient pour $a = \sqrt{2}$, car pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n - 1$, on a

$$f(i + \sqrt{2}) = g(i) \in \mathbb{Q}.$$

Montrons maintenant que $c_n \geq n$ est impossible. En effet, supposons que a soit irrationnel, et que $f(a + a_i) = q_i \in \mathbb{Q}$ pour certains $a_i \in \mathbb{Q}$, $1 \leq i \leq n$. L'interpolation de Lagrange fournit alors un polynôme $g(x) \in \mathbb{Q}[x]$ de degré au plus $n - 1$ tel que

 © 2026 Société mathématique du Canada

$g(a_i) = q_i$ pour $1 \leq i \leq n$. Considérons le polynôme $P(x) = f(x + a) - g(x)$. Comme $\deg(f) = n > \deg(g)$, on a $\deg(P) = n$. De plus, $P(a_i) = f(a_i + a) - g(a_i) = q_i - q_i = 0$, de sorte que les a_i sont les racines de P, c'est-à-dire

$$P(x) = b(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n)$$

pour un certain b non-nul. Le coefficient de x^n est b, qui doit être le coefficient de x^n dans $f(x)$, et est donc rationnel. Ensuite, $P(x) \in \mathbb{Q}[x]$, et donc $f(x + a) \in \mathbb{Q}[x]$. Cependant, si le coefficient de x^{n-1} dans $f(x)$ est $b' \in \mathbb{Q}$, alors le coefficient de x^{n-1} dans $f(x + a)$ est $bna + b'$, qui est irrationnel, ce qui constitue une contradiction.

Solution 2

Nous présentons une approche alternative qui utilise directement la théorie algébrique des nombres et l'algèbre linéaire. La preuve de l'impossibilité de $c_n \geq n$ est inspirée de la solution de Perry Dai. Cette fois, nous commençons par cette partie, car elle sera utilisée dans la construction. Pour l'ensemble du problème, posons

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i x^i.$$

Supposons qu'il existe un tel polynôme avec $c_n \geq n$. En remplaçant $f(x)$ par $f(x + a_1) - f(a + a_1) \in \mathbb{Q}[x]$, on peut supposer que $f(a) = 0$, d'où a est algébrique. Supposons que son degré soit d (nécessairement $\leq n$), de sorte que $\mathbb{Q}(a)$ admet une base sur $\mathbb{Q}$ donnée par $\{1, a, a^2, \ldots, a^{d-1}\}$. Comme a est irrationnel, on a $d \geq 2$. Une combinaison linéaire à coefficients rationnels de ces éléments est rationnelle si et seulement si les coefficients de tous les a^i pour $1 \leq i \leq d - 1$ sont nuls.

Développons maintenant

$$f(a + a_k) = \sum_{i=0}^{n} f_i (a + a_k)^i = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} f_i a_k^{i-j} a^j. \tag{1}$$

En remplaçant les termes $a^d, a^{d+1}, \ldots, a^n$ par des combinaisons linéaires à coefficients rationnels de $1, a, \ldots, a^{d-1}$, cette expression s'écrit

$$\sum_{i=0}^{d-1} g_i(a_k) a^i,$$

où les $g_i(a_k)$ sont des polynômes en la variable a_k à coefficients rationnels. Comme $f(a + a_k) \in \mathbb{Q}$, cela implique que $g_i(a_k) = 0$ pour tout $1 \leq i \leq d - 1$ et $1 \leq k \leq n$.

Considérons uniquement le polynôme g_1, c'est-à-dire le coefficient de a^1. Dans l'équation (1), les termes en a^j avec $0 \leq j \leq d - 1$ ne contribuent qu'à g_j. Ainsi, g_1 ne reçoit des contributions que pour $j = 1$. Parmi celles-ci, le plus grand exposant de a_k provient du terme $\binom{n}{1} f_n a_k^{n-1}$, où $\binom{n}{1} f_n$ est non nul. D'autres contributions à g_1 proviennent des termes en a^j avec $j \geq d$, après le remplacement de a^j par la combinaison linéaire rationnelle appropriée de $1, a, \ldots, a^{d-1}$. Cela engendre toutefois des termes de la forme Ca_k^{i-j}, où $i - j \leq n - d \leq n - 2$, puisque $d \geq 2$. En particulier, on voit que g_1 est de degré exactement $n - 1$, avec coefficient dominant $\binom{n}{1} f_n \neq 0$. Cependant, comme $g_1(a_k) = 0$ pour $1 \leq k \leq n$, le polynôme g_1 admet n racines distinctes, ce qui contredit le fait que son degré est exactement $n - 1$. Ainsi, un tel polynôme n'existe pas.

Pour la construction de $f(x)$, considérons le développement de $f(r + \sqrt{2})$, pour $r = 1, 2, \ldots, n - 1$. Celui-ci est de la forme $A_r + B_r\sqrt{2}$, où A_r et B_r sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers de $f_0, f_1, \ldots, f_n$. Imposons $B_r = 0$ pour tout $1 \leq r \leq n - 1$: cela équivaut à dire que le vecteur colonne $(f_0, f_1, \ldots, f_n)^T$ appartient au noyau d'une matrice de dimension $(n - 1) \times (n + 1)$ (les $n - 1$ lignes correspondant aux $n - 1$ combinaisons linéaires intervenant dans les B_r). Comme il y a $n - 1$ lignes, le rang est au plus $n - 1$, donc, d'après le théorème du rang, la dimension du noyau est au moins 2. Il existe donc une solution avec au moins un $f_i \neq 0$ pour $1 \leq i \leq n$. En particulier, on obtient un polynôme $f(x)$ de degré compris entre 1 et n tel que $f(r + \sqrt{2}) \in \mathbb{Q}$ pour $1 \leq r \leq n - 1$. Si $\deg(f) < n$, on obtient une contradiction avec $c_{\deg(f)} < \deg(f)$. Ainsi, $\deg(f) = n$, et la construction est valide.

(On a eu besoin que la dimension du noyau soit au moins 2 pour cette dernière étape. Si elle n'était égale qu'à 1, on disposerait bien d'une solution non nulle, mais celle-ci conduirait à un polynôme constant. Cela ne constituerait pas une contradiction, puisque l'énoncé ne concerne que les polynômes de degré strictement positif.)

 © 2026 Société mathématique du Canada