J1. Soient a, b et c des entiers positifs *distincts* tels que $a + b + c = 29$. Déterminez la plus petite valeur possible de $a^2 + b^2 + c^2$?

Solution

Nous affirmons que la réponse est

$$8^2 + 10^2 + 11^2 = \boxed{285}.$$

Tout d'abord, soient x, y des entiers positifs tels que $x \geq y + 3$, et remarquons que

$$x^2 + y^2 - ((x-1)^2 + (y+1)^2) = 2x - 2y - 2 \geq 4 > 0.$$

Ainsi, diminuer x de 1 et augmenter y de 1 conserve leur somme, diminue la somme de leurs carrés, et les maintient distincts (puisque $x - 1 > y + 1$).

Considérons un triplet minimisant (a, b, c), où l'on peut supposer sans perte de généralité que $a > b > c$. Nous affirmons que $a = 11$. Si $a \leq 10$, alors la somme maximale est $10 + 9 + 8 = 27 < 29$ (les entiers étant distincts), ce qui est une contradiction. Supposons maintenant que $a \geq 12$. Si $b \leq a - 3$, alors on peut remplacer (a, b, c) par $(a - 1, b + 1, c)$ et obtenir un nouveau triplet d'entiers distincts dont la somme des carrés est plus petite (d'après le résultat du paragraphe précédent). On doit donc avoir $b = a - 2$ ou $b = a - 1$. Dans tous les cas, $b \geq a - 2 \geq 10$, donc $a + b \geq 22$, et par conséquent $c = 29 - a - b \leq 7$. Mais alors on peut remplacer (a, b, c) par $(a, b - 1, c + 1)$, ce qui diminue la somme des carrés tout en conservant des entiers distincts, puisque $b \geq 10 \geq c + 3$. On obtient une contradiction, d'où $a = 11$.

On a alors $b + c = 29 - a = 18$ avec $11 > b > c$, ce qui donne de manière unique $(b, c) = (10, 8)$. Ainsi, ce triplet réalise le minimum

$$11^2 + 10^2 + 8^2 = 285,$$

comme annoncé.

J2. Considérons un trapèze $ABCD$, où les côtés AB et CD sont parallèles. On se donne des points W, X, Y et Z tels que $BCWX$ et $ADYZ$ soient des losanges, et que les intérieurs des trois quadrilatères $ABCD$, $BCWX$ et $ADYZ$ soient disjoints. Montrez que la distance entre les centres de $BCWX$ et $ADYZ$ est au plus égale à la moitié du périmètre de $ABCD$.

Remarque : Le centre d'un losange est le point d'intersection de ses diagonales.

Solution

Soit P le centre de $BCWX$ et Q le centre de $ADYZ$. Soient M le milieu de BC et N le milieu de AD. On a alors $\angle BPC = \angle AQD = 90°$, puisque $BCWX$ et $ADYZ$ sont des losanges. Ainsi,

$$PQ \leq PM + MN + NQ = \frac{BC}{2} + \frac{AB + CD}{2} + \frac{AD}{2}.$$

Le membre de droite est précisément égal à la moitié du périmètre de $ABCD$, ce qui conclut la démonstration.

J3. Soient $a, b \geq 2$ des entiers premiers entre eux. Soit S l'ensemble des points du plan à coordonnées entières situés strictement à l'intérieur du triangle de sommets $(0, 0)$, $(a, 0)$ et $(0, b)$. Déterminez, avec preuve,

$$\sum_{(x,y)\in S} (a - 2x)(b - 2y)$$

en fonction de a et b.

Remarque : Ici, la sommation signifie que l'on additionne la valeur $(a - 2x)(b - 2y)$ pour tous les points (x, y) appartenant à S.

Solution 1

Pour simplifier, posons $f(x, y) = (a - 2x)(b - 2y)$. Soit R la région du plan constituée des points du réseau (x, y) tels que $1 \leq x \leq a - 1$ et $1 \leq y \leq b - 1$. Alors S est l'ensemble des points du réseau de R situés en dessous de la droite $x/a + y/b = 1$. Soit T l'ensemble des points du réseau de R qui ne sont pas dans le triangle rectangle susmentionné et qui se trouvent strictement au-dessus de la droite $x/a + y/b = 1$.

Puisque a et b sont premiers entre eux, la droite $x/a + y/b = 1$, c'est-à-dire la droite $bx + ay = ab$, ne contient aucun point du réseau vérifiant $1 \leq x \leq a - 1$ et $1 \leq y \leq b - 1$. En effet, $bx + ay = ab$ implique que $b \mid ay$, donc $b \mid y$ par coprimalité, ce qui contredit $1 \leq y \leq b - 1$. Par conséquent, R est la réunion disjointe de S et T.

Sur R, on a alors

$$\begin{aligned}
\sum_{(x,y)\in R} f(x, y) &= \left(\sum_{x=1}^{a-1}(a - 2x)\right)\left(\sum_{y=1}^{b-1}(b - 2y)\right) \\
&= \left(a(a - 1) - 2 \cdot \frac{a(a - 1)}{2}\right)\left(b(b - 1) - 2 \cdot \frac{b(b - 1)}{2}\right) \\
&= 0 \cdot 0 = 0.
\end{aligned}$$

Cependant, l'application $F(x, y) = (a - x, b - y)$ est une bijection de S sur T. En effet, T est constitué des points du réseau de R situés au-dessus de la droite $x/a + y/b = 1$, S est constitué de points de réseau de R situés au-dessus de cette droite, et $x/a + y/b < 1$ si et seulement si

$$f(F(x, y)) = (a - 2(a - x))(b - 2(b - y)) = (2x - a)(2y - b) = (a - 2x)(b - 2y) = f(x, y).$$

Ainsi,

$$\sum_{(x,y)\in S} f(x, y) = \sum_{(x,y)\in T} f(x, y).$$

En combinant avec

$$0 = \sum_{(x,y)\in R} f(x, y) = \sum_{(x,y)\in S} f(x, y) + \sum_{(x,y)\in T} f(x, y)$$

on obtient

$$\sum_{(x,y)\in S} f(x,y) = 0$$

comme voulu.

Solution 2

Posons

$$T = \sum_{(x,y)\in S} (a-2x)(b-2y).$$

On montre que $T = 0$ en divisant le grand triangle en deux régions plus petites à l'aide de la médiane issue de $(0,0)$ vers le milieu $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ de l'hypoténuse. Cette médiane est la droite

$$y = \frac{b}{a}x.$$

Comme a et b sont premiers entre eux et supérieurs ou égaux à 2, il n'existe aucun point du réseau sur le segment ouvert reliant $(0,0)$ à $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$: en effet, si un point entier (x,y) appartenait à ce segment, on aurait alors $ay = bx$, et comme $\operatorname{pgcd}(a,b) = 1$, cela impliquerait $a \mid x$ et $b \mid y$, ce qui est impossible pour un point strictement situé entre les extrémités. Ainsi, tout point du réseau de S se trouve strictement d'un côté ou de l'autre de cette médiane.

Écrivons $S = S_1 \sqcup S_2$, où S_1 désigne l'ensemble des points du réseau de S situés en dessous de la médiane et S_2 celui des points du réseau de S situés au-dessus de la médiane. Commençons par considérer S_1. Si $(x,y) \in S_1$, alors $0 < y < \frac{b}{a}x$, et comme ce point appartient aussi au triangle initial, on a $x > 0$, $y > 0$ et $x < a - \frac{a}{b}y$. On réfléchit alors (x,y) horizontalement par rapport à la médiane de la tranche horizontale du triangle en l'envoyant sur $(a-x, y)$. Comme

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{a-x}{a} + \frac{y}{b} > \frac{y}{b},$$

et, comme (x,y) se situe en dessous de la médiane, on vérifie que $(a-x,y)$ se trouve dans la partie supérieure du triangle déterminée par le même niveau horizontal, tout en restant strictement à l'intérieur du triangle initial. Plus important encore, les deux termes correspondants s'annulent :

$$(a - 2(a-x))(b-2y) = (-a+2x)(b-2y) = -(a-2x)(b-2y).$$

Ainsi, les points appariés par $(x,y) \leftrightarrow (a-x,y)$ contribuent globalement pour zéro.

De même, pour les points de S_2, on effectue un appariement vertical en envoyant (x,y) sur $(x, b-y)$. Cela envoie les points de la région de gauche sur les points correspondants de la région complémentaire situés sur la même droite verticale, et, là encore, les termes correspondants s'annulent puisque

$$(a-2x)(b-2(b-y)) = (a-2x)(-b+2y) = -(a-2x)(b-2y).$$

Les seuls points de S qui ne peuvent être appariés sont ceux situés sur les droites $x = \frac{a}{2}$ ou $y = \frac{b}{2}$, car ils se reflètent sur eux-mêmes. Mais $x = \frac{a}{2}$ et $y = \frac{b}{2}$ impliquent tous deux que $(a-2x)(b-2y) = 0$, de sorte que ces termes ne contribuent pas à la somme. Par conséquent, toute la somme s'annule sous l'appariement ci-dessus :

$$\sum_{(x,y)\in S} (a-2x)(b-2y) = 0.$$

Solution 3

Posons

$$T = \sum_{(x,y)\in S} (a-2x)(b-2y).$$

On calcule T en sommant sur les points du réseau colonne par colonne. Pour chaque entier x avec $1 \le x \le a-1$, les points de S ayant pour première coordonnée x sont exactement $(x,1),(x,2),\ldots,(x,m_x)$, où m_x désigne le plus grand entier tel que $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} < 1$. Comme l'hypoténuse du triangle est la droite $y = b - \frac{b}{a}x$, on a

$$m_x = \left\lfloor b - \frac{b}{a}x \right\rfloor.$$

Comme $\text{pgcd}(a,b) = 1$, le nombre $\frac{bx}{a}$ n'est un entier pour aucun $x = 1,\ldots,a-1$, donc

$$m_x = b - 1 - \left\lfloor \frac{bx}{a} \right\rfloor.$$

Si l'on pose $n_x = \left\lfloor \frac{bx}{a} \right\rfloor$, alors $m_x = b-1-n_x$. La contribution de la x-ième colonne à la somme totale est donc

$$C_x = \sum_{y=1}^{m_x} (a-2x)(b-2y) = (a-2x)\sum_{y=1}^{m_x}(b-2y).$$

Or

$$\sum_{y=1}^{m_x}(b-2y) = m_x b - 2\cdot\frac{m_x(m_x+1)}{2} = m_x(b-m_x-1),$$

et en substituant $m_x = b-1-n_x$, on obtient

$$\sum_{y=1}^{m_x}(b-2y) = (b-1-n_x)n_x.$$

Ainsi,

$$C_x = (a - 2x)(b - 1 - n_x)n_x.$$

On compare maintenant les colonnes x-ième et $(a - x)$-ième colonnes. Comme

$$n_{a-x} = \left\lfloor \frac{b(a-x)}{a} \right\rfloor = \left\lfloor b - \frac{bx}{a} \right\rfloor = b - 1 - \left\lfloor \frac{bx}{a} \right\rfloor = b - 1 - n_x,$$

il s'ensuit que

$$(b - 1 - n_{a-x})n_{a-x} = n_x(b - 1 - n_x).$$

D'autre part,

$$a - 2(a - x) = -(a - 2x).$$

Par conséquent,

$$C_{a-x} = (a - 2(a - x))(b - 1 - n_{a-x})n_{a-x} = -(a - 2x)(b - 1 - n_x)n_x = -C_x.$$

Ainsi, la contribution de la colonne x s'annule exactement avec celle de la colonne $a - x$. Par conséquent, toutes les colonnes s'annulent en paires. Si a est pair, la colonne centrale $x = \frac{a}{2}$ contribue de toute façon pour 0, puisque dans ce cas $a - 2x = 0$. Il s'ensuit que

$$\sum_{(x,y)\in S} (a - 2x)(b - 2y) = 0.$$

J4. Il existe n types de pièces dans la mine d'or de Wario. Chaque pièce du i-ième type vaut d_i cents, où $d_1, \ldots, d_n$ sont des entiers positifs distincts. Un entier positif D est dit *chanceux* si la propriété suivante est satisfaite : pour tout entier positif k, toute collection de pièces (contenant un nombre arbitraire de pièces de chaque type) dont la valeur totale est exactement kD cents peut être partitionnée en k groupes, chacun d'une valeur de D cents. Un nombre chanceux existe-t-il nécessairement ?

Solution 1

La réponse est oui. On raisonne par récurrence sur k, en extrayant à répétition un groupe de valeur D parmi les pièces restantes ; le cas $k = 1$ est immédiat. Le problème est donc équivalent à l'étape de récurrence suivante :

Étant donnés des entiers positifs $d_1, \ldots, d_n$, existe-t-il un entier positif D tel que, chaque fois que des entiers $n_i \geq 0$ vérifient $\sum_i n_i d_i = mD$ pour un entier positif $m \geq 2$, il existe des entiers $0 \leq m_i \leq n_i$ tels que $\sum_i m_i d_i = D$?

Soit d un multiple commun de $d_1, \ldots, d_n$ (par exemple $d = d_1 \cdots d_n$ ou $d = \text{ppcm}(d_1, \ldots, d_n)$). Nous affirmons que $D = Md$ convient pour un choix approprié de M. En effet, remarquons que toute collection de d/d_i copies de d_i peut être regroupée en une famille de nombres dont la somme vaut d. Il existe au moins

$$\sum_i \left\lfloor \frac{n_i}{d/d_i} \right\rfloor$$

de tels groupes ; il suffit donc de montrer que la quantité ci-dessus est au moins égale à M. Or, on a

$$\begin{aligned}
\sum_i \left\lfloor \frac{n_i}{d/d_i} \right\rfloor &\geq \left(\sum_i \frac{n_i}{d/d_i} \right) - n \\
&= \left(\frac{1}{d} \sum_i n_i d_i \right) - n \\
&= mM - n \\
&\geq M + (M - n).
\end{aligned}$$

Par conséquent, le choix $M = n$ convient comme souhaité.

Solution 2

On présente une solution modifiée, fondée sur la soumission de Perry Dai, qui montre que $D = d_1 \ldots d_n$ convient. Comme dans la Solution 1, nous raisonnons par récurrence sur k, le cas de base $k = 1$ étant trivial. Supposons donc que $k \geq 2$ et que $a_1 d_1 + \cdots + a_n d_n = kD$. Sans perte de généralité, supposons que $a_1 d_1 \geq a_2 d_2 \geq \ldots \geq a_n d_n$. Alors $a_1 d_1 \geq \frac{kD}{n} \geq \frac{2d_1 \ldots d_n}{n}$, d'où $a_1 \geq \frac{2d_2 \ldots d_n}{n}$.

Affirmation. On a $a_1 \geq d_i$ pour tout $2 \leq i \leq n$, à l'exception du cas où $n = 3$ et où $d_i = 1$ pour un certain $i \geq 2$.

Preuve de l'affirmation. Si $n \leq 2$ ou $n \geq 4$, alors

$$a_1 \geq \frac{2d_2 \dots d_n}{n} = d_i \cdot \frac{2}{n} \cdot \prod_{2 \leq j \leq n, j \neq i} d_j \geq d_i \cdot \frac{2}{n} \cdot (n-2)! \geq d_i.$$

Si $n = 3$ et qu'aucun des d_i n'est égal à 1, alors $a_1 \geq \frac{2d_2d_3}{3} \geq \frac{4}{3}d_i \geq d_i$. $\square$

Laissons de côté pour l'instant le cas $n = 3$ où l'un des d_i est égal à 1, et poursuivons en supposant que $a_1 \geq d_i$ pour tout $2 \leq i \leq n$.

Considérons une suite d'entiers non négatifs $x_1, \dots, x_n$ telle que $x_1d_1 + \dots + x_nd_n = D$ et $x_i \leq a_i$ pour tout $2 \leq i \leq n$, où l'on choisit x_1 minimal sous ces contraintes. Remarquons que $\frac{D}{d_1}, 0, \dots, 0$ satisfait les contraintes ci-dessus, de sorte qu'au moins une telle suite existe. Si l'on a également $x_1 \leq a_1$, alors $x_1, \dots, x_n$ correspond à un groupe de pièces d'une valeur de D cents. Supposons que ce ne soit pas le cas, de sorte que $x_1 > a_1$. Pour tout $2 \leq i \leq n$, remarquons que remplacer (x_1, x_i) par $(x_1 - d_i, x_i + d_1)$ ne modifie pas $x_1d_1 + \dots + x_nd_n$, conserve x_1 non négatif puisque $x_1 > a_1 \geq d_i$ d'après l'affirmation ci-dessus, et diminue x_1. Par minimalité de x_1, on doit donc avoir $x_i + d_1 > a_i$ pour tout $2 \leq i \leq n$, donc $x_i > a_i - d_1$. Alors,

$$D = \sum_{i=1}^{n} x_id_i = x_1d_1 + \sum_{i=2}^{n} x_id_i \geq (a_1+1)d_1 + \sum_{i=2}^{n}(a_i - d_1 + 1)d_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_id_i + \sum_{i=1}^{n} d_i - d_1 \sum_{i=2}^{n} d_i \geq 2D + \sum_{i=1}^{n} d_i - d_1 \sum_{i=2}^{n} d_i$$

$$\implies d_1 \sum_{i=2}^{n} d_i \geq D + \sum_{i=1}^{n} d_i > d_1 \left(1 + \prod_{i=2}^{n} d_i\right).$$

Nous soutenons que $1 + \prod_{i=2}^{n} d_i \geq \sum_{i=2}^{n} d_i$ pour tous entiers positifs distincts $d_2, \dots, d_n$, ce qui entraînerait une contradiction. Sans perte de généralité, on peut les réordonner de sorte que $d_2 < d_3 < \dots < d_n$, de sorte que $2 \leq d_i$ pour tout $3 \leq i \leq n$. Alors $(d_2 - 1)(d_3 \dots d_n - 1) \geq 0$ et $d_3 \dots d_n \geq d_3 + \dots + d_n$, d'où

$$1 + \prod_{i=2}^{n} d_i \geq d_2 + \prod_{i=3}^{n} d_i \geq d_2 + \sum_{i=3}^{n} d_i$$

comme voulu. Ceci achève la démonstration, à l'exception du cas où $n = 3$ et où l'un des d_i est égal à 1.

Dans le cas restant, supposons que les pièces aient pour valeurs $d_1, d_2, 1$. Si l'on dispose d'au moins d_2 pièces de valeur d_1, ou d'au moins d_1 pièces de valeur d_2, alors on peut extraire un groupe de valeur $D = d_1d_2$. Sinon, la valeur totale des pièces de valeur d_1 et d_2 est $\leq d_1(d_2 - 1) + d_2(d_1 - 1) \leq kD - d_1 - d_2$, de sorte qu'il y a au moins $d_1 + d_2$ pièces de valeur 1. On peut former un groupe de D en prenant des pièces de valeur d_1 ou d_2 jusqu'à ce que toutes ces pièces soient épuisées, ou jusqu'à ce que l'ajout d'une pièce supplémentaire fasse dépasser D, puis en complétant avec des pièces de valeur 1.

J5. Turbo l'escargot joue à un jeu sur un plateau comportant $2n$ lignes et $2n$ colonnes. Il y a $2n^2$ monstres qui commencent par occuper $2n^2$ cases distinctes, avec la connaissance de Turbo. Après cela, Turbo choisit une case quelconque et l'étiquette 1. À partir de cette case, Turbo parcourt ensuite toutes les autres $4n^2 - 1$ cases exactement une fois, en les étiquetant successivement $2, 3, \ldots, 4n^2$. Turbo ne se déplace qu'entre des cases partageant un côté et ne revient jamais sur une case déjà visitée.

Le pointage final est la somme des étiquettes des cases contenant des monstres. Les monstres cherchent à se placer de manière à maximiser le pointage, tandis que Turbo cherche à le minimiser en fonction des positions des monstres. Déterminez, en fonction de n, le plus grand pointage que les monstres peuvent garantir.

Solution 1

Le pointage maximal que les monstres peuvent obtenir est $4n^4$. Celui-ci est atteint en se plaçant selon un motif en damier. On dira qu'une case est marquée si un monstre l'occupe, et vide sinon. Il est alors clair que le parcours de Turbo alternera entre cases marquées et cases vides. En partant d'une case marquée, le pointage est

$$1 + 3 + \cdots + (4n^2 - 1) = 4n^4.$$

Nous allons maintenant montrer que Turbo peut toujours obtenir un pointage au plus égal à $4n^4$, quelle que soit la position des monstres. Remarquons que, pour une grille $2n \times 2n$, il existe un cycle hamiltonien passant par toutes les cases. Considérons un monstre arbitraire et supposons qu'il se trouve sur la case 1. Considérons ensuite les deux parcours partant de cette case et suivant le cycle hamiltonien dans chaque direction. Pour tout monstre autre que celui situé sur la case 1, son indice dans l'un des parcours sera i et dans l'autre sera $4n^2 + 2 - i$. Ainsi, la somme des pointages de ces deux parcours est

$$\begin{aligned} 2 + \sum_{\text{monstre en } i} \big(i + 4n^2 + 2 - i\big) &= 2 + (2n^2 - 1)(4n^2 + 2) \\ &= 8n^4. \end{aligned}$$

Ainsi, l'un de ces deux parcours a un pointage au plus égal à $4n^4$.

Solution 2

Comme dans la solution précédente, les monstres peuvent se disposer selon un motif en damier afin d'atteindre une borne inférieure de $4n^4$. Nous allons maintenant montrer que toute autre configuration permet à Turbo d'obtenir un pointage au plus égal à $4n^4 - n^2$, ce qui est légèrement plus précis que dans la solution précédente.

Comme précédemment, il existe un cycle hamiltonien. Si les monstres ne sont pas disposés en damier, il doit y avoir alors deux cases adjacentes de ce cycle qui sont toutes deux occupées par des monstres. Notons ces cases A et B. Nous allons considérer deux parcours suivant ce cycle. Le premier commence en A, passe ensuite par B, puis continue le long du cycle dans ce sens jusqu'à se terminer sur une case adjacente à A. De même, le second parcours commence en B, passe ensuite par A, puis continue jusqu'à se terminer sur une case adjacente à B.

Nous soutenons que les pointages des parcours, notés $S_{A\to B}$ et $S_{B\to A}$, ont pour somme $8n^4 - 2n^2$. Considérons n'importe lequel des $2n^2 - 2$ monstres qui ne se trouvent ni en A ni en B, et supposons qu'il occupe la position d'indice i dans le premier parcours. Alors, dans le second parcours, ce monstre sera rencontré à l'indice $4n^2 + 3 - i$. On obtient donc

$$\begin{aligned} S_{A\to B} + S_{B\to A} &= 6 + \sum_{\text{monstre en } i} \big(i + 4n^2 + 3 - i\big) \\ &= 6 + (2n^2 - 2)(4n^2 + 3) \\ &= 8n^4 - 2n^2. \end{aligned}$$

Ainsi, $\min(S_{A\to B}, S_{B\to A}) \leq 4n^4 - n^2$, et il existe donc un parcours que Turbo peut emprunter pour obtenir un pointage $\leq 4n^4 - n^2$.