# 2025 Défi ouvert canadien de mathématiques

## **Solutions officielles**


*Un concours de la Société mathématique du Canada.*

Le DOCM comprend trois sections :

A. Des questions à réponse courte valant 4 points chacune. La totalité des points sera attribuée si la réponse est correcte. Des notes partielles peuvent être attribuées pour le travail démontré si la réponse n'est pas correcte.

B. Des questions à réponse courte valant 6 points chacune. La totalité des points sera attribuée si la réponse est correcte. Des notes partielles peuvent être attribuées pour le travail démontré si la réponse n'est pas correcte.

C. Des questions à solutions complètes en plusieurs parties, valant 10 points chacune. Les solutions doivent être complètes et clairement présentées pour obtenir la totalité des points.

La SMC remercie le commanditaire du DOCM 2025 :

CITADEL | CITADEL Securities

# Section A

**A1** Quelle est la valeur de 200 % de 2 % d'un tiers de 2025?

---

**Solution:** On veut calculer

$$200\% \cdot 2\% \cdot \frac{1}{3} \cdot 2025.$$

On peut remplacer les pourcentages par des fractions, ce qui donne

$$\frac{200}{100} \cdot \frac{2}{100} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2025.$$

Les deux premiers termes se simplifient en

$$\frac{200}{100} \cdot \frac{2}{100} = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}.$$

On remarque que 25 divise 2025; en effet, $2025 = 25 \cdot 81$. L'expression devient alors

$$\frac{1}{25} \cdot \frac{1}{3} \cdot 81 \cdot 25 = \frac{81}{3} = 27.$$

Answer: $\boxed{27}$

---

**A2** Combien d'entiers compris entre 10 et 500 inclusivement ont leurs chiffres en ordre strictement décroissant ? Par exemple, 41 et 320 sont de tels entiers, mais 441 et 230 ne le sont pas.

---

**Solution 1:** On compte d'abord les entiers à deux chiffres, puis les entiers à trois chiffres, et on additionne ensuite ces deux quantités pour obtenir le dénombrement final.

Si l'entier a deux chiffres, il y a $\binom{10}{2} = \frac{10\cdot 9}{2!} = 45$ façons de choisir les deux chiffres que l'on place dans l'ordre décroissant. Si l'entier a trois chiffres, on remarque qu'on peut seulement utiliser les chiffres $0, 1, 2, 3$ et 4, puisque le nombre ne doit pas dépasser 500. Il y a $\binom{5}{3} = \frac{5\cdot 4\cdot 3}{3!} = 10$ façons de choisir les trois chiffres que l'on place dans l'ordre décroissant. Le total est donc de 55.

---

**Solution 2:** On procède à un raisonnement par cas similaire à celui présenté ci-dessus, en distinguant selon que l'entier possède deux ou trois chiffres.

Dans le cas où le nombre a deux chiffres, supposons que le chiffre des dizaines soit $k$. Le chiffre des unités peut alors être n'importe lequel de $0, 1, \ldots, k-1$, ce qui donne un total de $k$ possibilités. Par exemple, si le chiffre des dizaines est 5, alors les cinq possibilités pour le chiffre des unités sont 0, 1, 2, 3 et 4.

Comme $k$ peut être n'importe quel chiffre entre 1 et 9 inclusivement, on obtient que le nombre total de possibilités à deux chiffres est

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45.$$

Dans le cas où le nombre a trois chiffres, supposons que le chiffre du milieu soit $k$. Le chiffre des unités peut alors être n'importe lequel de $0, 1, \ldots, k-1$, ce qui donne $k$ possibilités, tandis que le chiffre des centaines peut être n'importe lequel de $k+1, k+2, \ldots, 4$, ce qui donne $4-k$ possibilités. Le chiffre $k$ peut être égal à 1, 2 ou 3, de sorte qu'il y a au total

$$1 \cdot (4-1) + 2 \cdot (4-2) + 3 \cdot (4-3) = 3 + 4 + 3 = 10$$

possibilités. Comme dans la Solution 1, on obtient au total 55.

---

**Solution 3:** Énumérons explicitement et systématiquement tous les nombres.

Les nombres à deux chiffres sont :

10,

20, 21,

30, 31, 32,

40, 41, 42, 43,

etc.

90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98.

On obtient donc $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$ entiers de ce type qui sont inférieurs à 100.

Il y a ensuite $1 + 3 + 6 = 10$ entiers supplémentaires compris entre 100 et 500 :

210,

310, 320, 321,

410, 420, 421, 430, 431, 432.

Le total est donc de 55.

Answer: $\boxed{55}$.

**A3** Un entier $n > 1$ est dit *doublement carré* si $n$ est un carré parfait et si le nombre de diviseurs positifs de $n$ (y compris 1 et lui-même) est aussi un carré parfait. Déterminez le plus petit entier doublement carré qui est strictement supérieur à 1.

---

**Solution 1:** Posons $n = k^2$. Si $k$ est un nombre premier, alors $n$ possède trois diviseurs positifs : 1, $k$ et $k^2$; ainsi, $n$ n'est pas doublement carré. Examinons maintenant les valeurs composées de $k$ : si $k = 4$, alors $n$ possède cinq diviseurs positifs : 1, 2, 4, 8 et 16. Le nombre composé suivant est $k = 6$, auquel cas $n$ possède neuf diviseurs positifs : 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 et 36. Ainsi, 36 est le plus petit entier doublement carré strictement supérieur à 1.

On peut résumer cette solution dans le tableau suivant.

| nombre carré | diviseurs | nombre de diviseurs |
|---|---|---|
| 4 | 1, 2, 4 | 3 |
| 9 | 1, 3, 9 | 3 |
| 16 | 1, 2, 4, 8, 16 | 5 |
| 25 | 1, 5, 25 | 3 |
| 36 | 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36 | 9 |

---

**Solution 2:** On peut rendre la recherche un peu plus systématique. Si l'on pose $n = p_1^{2a_1} \cdot p_2^{2a_2} \cdots p_k^{2a_k}$, alors on sait que $n$ possède $(2a_1 + 1)(2a_2 + 1) \cdots (2a_k + 1)$ diviseurs. Ce nombre est impair; ainsi, si $n$ est doublement carré, le plus petit nombre possible de diviseurs est 9. On remarque que 9 peut s'écrire comme produit de nombres impairs de deux façons :

$$9 = 2 \cdot 4 + 1 \quad \text{et} \quad 9 = (2 \cdot 1 + 1)(2 \cdot 1 + 1),$$

ce qui conduit aux décompositions en facteurs premiers

$$n = p_1^8 \quad \text{et} \quad n = p_1^2 p_2^2.$$

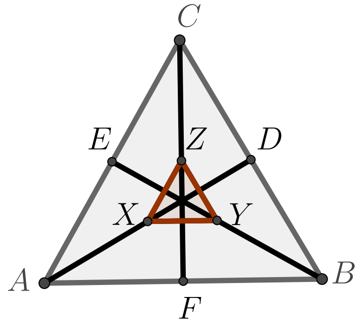
Dans le premier cas, la plus petite valeur possible de $n$ est $2^8 = 256$, et dans le second cas, la plus petite valeur possible de $n$ est $2^2 \cdot 3^2 = 36$.

La réponse est donc 36.

Answer: $\boxed{36}$.

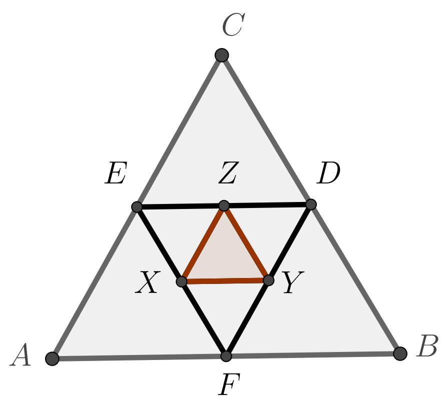
---

**A4** Soit $ABC$ un triangle équilatéral d'aire 80. Soient $D, E$ et $F$ les milieux des côtés $BC$, $CA$ et $AB$, respectivement et soient $X$, $Y$ et $Z$ les milieux des segments $AD$, $BE$ et $CF$, respectivement. Déterminez l'aire du triangle $XYZ$.



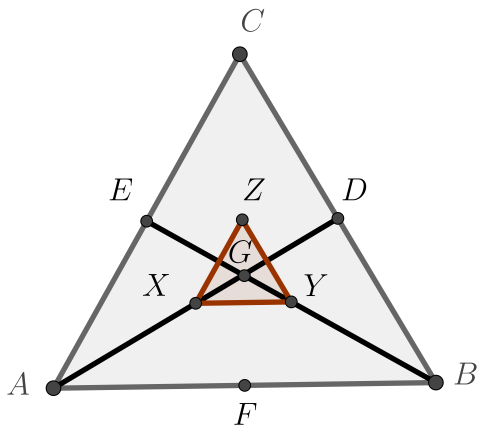

**Solution 1:** On affirme d'abord que $X$ est le milieu de $EF$. Remarquons que les triangles $CED$ et $CAB$ sont semblables par le critère CAC, puisqu'ils partagent l'angle commun $\angle ACB$ et que $\frac{CA}{CE} = \frac{CB}{CD} = 2$. Par conséquent, les droites $ED$ et $AB$ sont parallèles. De même, les droites $DF$ et $CA$ sont parallèles, de sorte que le quadrilatère $AEDF$ est un parallélogramme. Il s'ensuit que ses diagonales $AD$ et $EF$ ont le même milieu, qui est $X$, comme voulu.

On observe maintenant, à partir des triangles semblables $CED$ et $CAB$, que $AB = 2 \cdot ED$. De même, à partir des triangles semblables $FXY$ et $FED$, on obtient $ED = 2 \cdot XY$, d'où $AB = 4 \cdot XY$. De façon analogue, on a $AC = 4 \cdot XZ$ et $BC = 4 \cdot YZ$, si bien que les triangles $ABC$ et $XYZ$ sont semblables par le critère CCC. Le rapport de leurs longueurs correspondantes est 4, donc le rapport de leurs aires est 16. Ainsi, l'aire du triangle $XYZ$ est $80/16 = 5$.




**Solution 2:** Posons $AD = x$, et soit $G$ le centre de gravité du triangle $ABC$. On sait alors que $AG = \frac{2x}{3}$ et $AX = \frac{x}{2}$, d'où $XG = \frac{2x}{3} - \frac{x}{2} = \frac{x}{6}$. Cela montre que

$AG = 4 \cdot XG$. De même, on a $BG = 4 \cdot YG$, si bien que les triangles $ABG$ et $XYG$ sont semblables avec un rapport de similitude égal à 4. Il s'ensuit encore que $AB = 4 \cdot XY$, ce qui permet de poursuivre le raisonnement comme dans la Solution 1.




---

**Solution 3:** On peut utiliser des coordonnées. Supposons que la longueur du côté du triangle $ABC$ soit $x$, et plaçons

$$C = \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}x\right), \qquad A = \left(-\frac{1}{2}x, 0\right), \qquad B = \left(\frac{1}{2}x, 0\right).$$

On peut alors calculer

$$F = (0,0), \qquad D = \left(\frac{1}{4}x, \frac{\sqrt{3}}{4}x\right), \qquad E = \left(-\frac{1}{4}x, \frac{\sqrt{3}}{4}x\right),$$

puis

$$Z = \left(0, \frac{\sqrt{3}}{4}x\right), \qquad X = \left(-\frac{1}{8}x, \frac{\sqrt{3}}{8}x\right), \qquad Y = \left(\frac{1}{8}x, \frac{\sqrt{3}}{8}x\right).$$

Pour calculer l'aire du triangle $XYZ$, on peut utiliser la formule du lacet : elle vaut

$$\frac{1}{2}\left|\left(-\tfrac{1}{8}x\right)\left(\tfrac{\sqrt{3}}{8}x\right) - \left(\tfrac{\sqrt{3}}{8}x\right)\left(\tfrac{1}{8}x\right) + \left(\tfrac{1}{8}x\right)\left(\tfrac{\sqrt{3}}{4}x\right) - \left(\tfrac{\sqrt{3}}{4}x\right)\left(-\tfrac{1}{8}x\right)\right| = \frac{\sqrt{3}}{64}x^2.$$

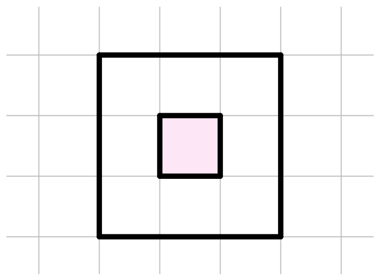
Remarquons que l'aire du triangle $ABC$ est $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 = 80$, donc l'aire du triangle $XYZ$ est $80/16 = 5$, comme souhaité.

Answer: $\boxed{5}$

# Section B

**B1** Min et Max disposent chacun d'une grille $4\times4$ composée de 16 carrés unitaires. Chacun d'eux enlève trois de ces carrés unitaires dans sa grille, puis calcule le périmètre de la figure obtenue. Quelle est la différence maximale possible entre leurs réponses?

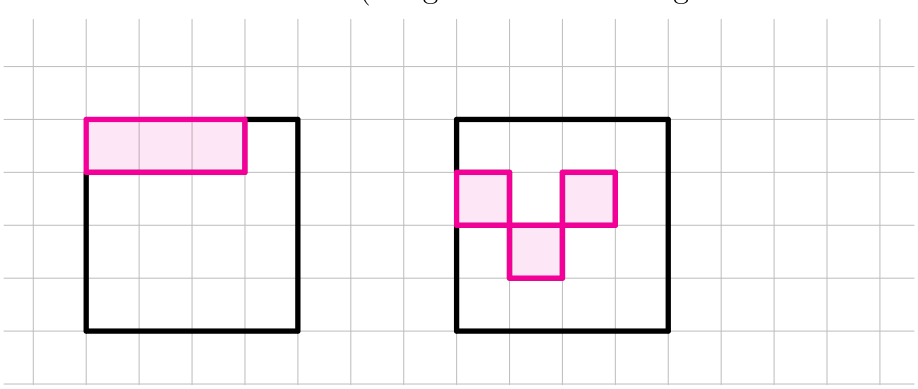
Note: Le *périmètre* d'une figure est la somme des longueurs de tous les segments de droite qui la délimitent. Par exemple, le carré $3\times3$ suivant duquel le carré central $1\times1$ est enlevé a un périmètre égal à 16.



---

**Solution:** Min ne peut pas réduire le périmètre par rapport à la figure initiale, puisqu'il doit rester au moins une carré unitaire dans chaque rangée et dans chaque colonne. Son périmètre est donc 16. Max peut augmenter le périmètre de 4 chaque fois qu'il enlève un carré unitaire ne partageant aucun côté avec la configuration initiale $4\times4$, et de 2 chaque fois qu'il enlève un carré unitaire partageant un côté avec la configuration initiale. Il n'y a que 4 carrés unitaires candidats qui ne partagent aucun côté, et il ne peut pas en choisir 3 parmi ces 4 de manière à ce qu'ils ne partagent aucun côté entre eux. Ainsi, le mieux qu'il puisse faire est d'augmenter le périmètre de 10.

On peut y parvenir, par exemple, comme l'illustre le schéma suivant, où les carrés unitaires rose sont retirés (la figure de Min est à gauche et celle de Max est à droite).



Ainsi, la réponse est 10.

Answer: $\boxed{10}$

**B2** Elizabeth garde ses photos dans trois boîtes. Il existe un entier non négatif $k$ tel que la première boîte contient $\frac{k}{5}$ du nombre total de ses photos, la deuxième boîte contient 3/11 du nombre total de ses photos, et la troisième boîte contient 558 photos. Combien de photos Elizabeth a-t-elle dans sa collection?

---

**Solution 1:** Soit $N$ le nombre de photos dans la collection d'Elizabeth. On a alors

$$\frac{k}{5}N + \frac{3}{11}N + 558 = N,$$

où $0 < k < 5$ est un entier positif. On obtient alors

$$\begin{aligned}55\left(\frac{k}{5}N + \frac{3}{11}N + 558\right) &= 55N\\ 55 \ \cdot 558 &= (40 - 11k)N\\ 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 31 &= (40 - 11k)N\end{aligned}$$

où

| $k$ | $40 - 11k$ |
|---|---|
| 1 | 29 |
| 2 | $18 = 2 \cdot 3^2$ |
| 3 | 7 |
| 4 | $-4$ |

Cependant, $40 - 11k$ doit être un diviseur de $2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 31$ $(= 30690)$, ce qui n'est possible que si $k = 2$. On obtient alors

$$\begin{aligned}(40 - 11 \cdot 2)N &= 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 31\\ 18N &= 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 31\\ N &= 5 \cdot 11 \cdot 31 = 1705.\end{aligned}$$

---

**Solution 2:** Tout d'abord, remarquons que le nombre de photos qu'Elizabeth possède doit être divisible par 55. Supposons qu'elle ait $55n$ photos. On sait alors que

$$11kn + 15n + 558 = 55n,$$

d'où

$$558 = (40 - 11k)n.$$

Autrement dit, $n$ et $40 - 11k$ doivent tous deux être des diviseurs de 558. Notons que la décomposition en facteurs premiers de 558 est

$$558 = 2 \cdot 3^2 \cdot 31.$$

En testant les valeurs $k = 0, 1, 2$ et 3, on obtient respectivement

$$40 - 11k = 40,\ 29,\ 18,\ 7.$$

Comme 40, 29 et 7 ne sont pas des diviseurs de 558, il faut nécessairement que $k = 2$. Dans ce cas, $40 - 11k = 18$, ce qui donne $n = 31$.

On conclut donc qu'Elizabeth possède

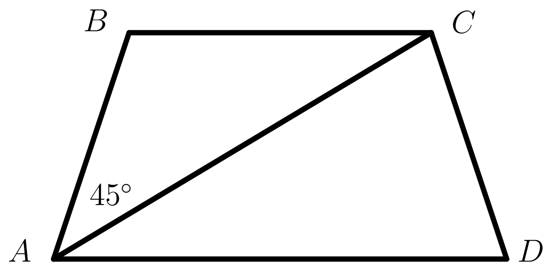
$$55n = 55 \cdot 31 = 1705$$

photos.

Answer: $\boxed{1705}$

---

**B3** Soit $ABCD$ un trapèze isocèle tel que $AB = CD$ et tel que les côtés parallèles sont tels que $AD > BC$. Si l'on sait que $AC = AD = 10$ et que $\angle BAC = 45°$. Déterminez l'aire du trapèze.

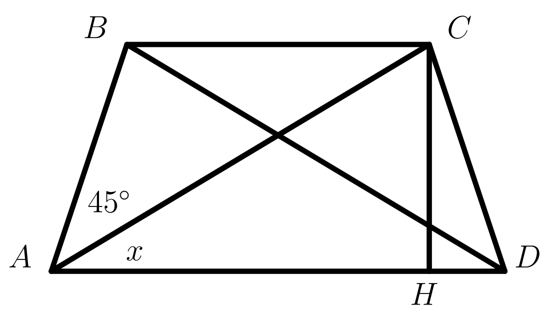



---

**Solution 1:** Posons $\angle CAD = x$ et cherchons à exprimer certains des autres angles de la figure en fonction de $x$. Comme le trapèze est isocèle, on a $\angle CDA = \angle BAD = 45° + x$. De plus, puisque le triangle $ACD$ est isocèle, on obtient également $\angle ACD = \angle CDA = 45° + x$. La somme des angles du triangle $ACD$ vaut $180°$, donc $x + 2(x + 45°) = 180°$, d'où $x = 30°$.

Soit $H$ le pied de la hauteur issue de $C$ sur $AD$. Comme $x = 30°$, le triangle $ACH$ est un triangle 30-60-90, d'où $CH = 5$ et $AH = 5\sqrt{3}$. Il s'ensuit que $HD = 10 - 5\sqrt{3}$ unités. Comme le trapèze est isocèle, on a $BC = AD - 2HD = 10 - 2(10 - 5\sqrt{3}) = 10(\sqrt{3} - 1)$ unités.

Finalement, l'aire du trapèze est $\frac{AD+BC}{2} \times CH = 25\sqrt{3}$.




**Une variante:** Si l'on note $I$ le pied de la hauteur issue de $A$ sur $BC$, alors on constate que les triangles $ABI$ et $CDH$ sont congruents; ainsi, l'aire du trapèze $ABCD$ est égale à celle du rectangle $ICHA$, soit $25\sqrt{3}$.

---

**Solution 2:** On définit $x$ comme dans la Solution 1 et on trouve $x = 30°$. On sait alors que le plus petit angle entre les droites $AC$ et $BD$ est égal à $60°$, de sorte que l'aire du quadrilatère $ABCD$ est

$$\frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin 60° = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{3}.$$

Answer: $\boxed{25\sqrt{3}}$

**B4** Soient $a_0, a_1, \dots, a_{100}$ des nombres réels fixes, deux-à-deux distincts et non nuls ($a_i \neq a_j$, $a_i \neq 0$, pour tout $0 \leq i \neq j \leq 100$). Considérons le polynôme $p(x) = a_{100}x^{100} + a_{99}x^{99} + \cdots + a_1x + a_0$. On obtient un polynôme $q(x)$ en choisissant uniformément au hasard deux nombres distincts parmi $a_0, a_1, \dots, a_{100}$ puis en les échangeant dans l'expression de $p(x)$. Les polynômes $p(x)$ et $q(x)$ sont ensuite représentés dans le plan comme fonctions de $x$. Déterminez le nombre *espéré* de points d'intersection des graphes de ces deux polynômes.

Ici, chaque point d'intersection est compté comme un seul point, quelle que soit sa multiplicité.

L'*espérance* d'une variable aléatoire est la moyenne pondérée des valeurs possibles que cette variable peut prendre, chaque valeur étant pondérée par sa probabilité respective. Par exemple, l'espérance du nombre obtenu en lançant un dé régulier à six faces est

$$1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{2}.$$

---

**Solution 1:** Supposons que les coefficients $a_i$ et $a_j$ soient échangés dans $p(x)$ pour former $q(x)$, où $i < j$. L'ensemble des points $(x, y)$ où les deux polynômes se coupent est défini par les solutions de l'équation $p(x) = q(x)$. Cette équation peut s'écrire

$$a_{100}x^{100} + a_{99}x^{99} + \cdots + a_1x + a_0 =$$
$$a_{100}x^{100} + \cdots + a_{j+1}x^{j+1} + a_ix^j + a_{j-1}x^{j-1} + \cdots + a_{i+1}x^{i+1} + a_jx^i + a_{i-1}x^{i-1} + \cdots + a_0.$$

On constate que tous les termes autres que ceux en $x^i$ et $x^j$ s'annulent, de sorte que l'équation se réécrit

$$a_jx^j + a_ix^i = a_ix^j + a_jx^i.$$

En factorisant, on obtient

$$(a_j - a_i)(x^{j-i} - 1)x^i = 0.$$

Comme $a_i \neq a_j$, les solutions de cette équation sont

$$\begin{cases} x = 0 & \text{lorsque } i \neq 0, \\ x = 1 & \text{toujours et} \\ x = -1 & \text{lorsque } j - i \text{ est pair.} \end{cases}$$

Notons qu'il y a $\binom{101}{2} = 5050$ paires de coefficients pouvant être échangées.

Si le seul point d'intersection est $(1, p(1))$, alors il faut que $i = 0$ et que $j$ soit impair. Il y a 50 choix possibles pour $j$, donc la probabilité que cela se produise est $\frac{50}{\binom{101}{2}} = \frac{1}{101}$.

Si les trois points $(-1, p(-1))$, $(0, p(0))$ et $(1, p(1))$ sont des points d'intersection, il faut que $i \neq 0$ et que $j - i$ soit pair. Si $i$ et $j$ sont impairs, il y a $\binom{50}{2}$ possibilités pour choisir $i$ et $j$. De même, si $i$ et $j$ sont pairs, il y a aussi $\binom{50}{2}$ possibilités. Ainsi, la probabilité qu'il y ait trois points d'intersection est $\frac{2 \cdot \binom{50}{2}}{\binom{101}{2}} = \frac{49}{101}$.

On en déduit que la probabilité qu'il y ait exactement deux points d'intersection est $1 - \frac{1}{101} - \frac{49}{101} = \frac{51}{101}$.

La valeur espérée du nombre de points d'intersection est donc

$$1 \cdot \frac{1}{101} + 2 \cdot \frac{51}{101} + 3 \cdot \frac{49}{101} = \frac{250}{101}.$$

---

**Solution 2:** On peut plutôt calculer le nombre espéré de points d'intersection par linéarité de l'espérance. Comme dans la Solution 1, on obtient la classification

$$\begin{cases} x = 0 & \text{lorsque } i \neq 0, \\ x = 1 & \text{toujours et} \\ x = -1 & \text{lorsque } j - i \text{ est pair.} \end{cases}$$

Le nombre espéré de points d'intersection est alors égal à $P_{-1} + P_0 + P_1$, où $P_k$ désigne la probabilité que $(x, y) = (k, p(k))$ soit un point d'intersection des deux courbes.

On observe que $P_1 = 1$, et que $P_0 = \frac{\binom{100}{2}}{\binom{101}{2}} = \frac{99}{101}$, puisque $x = 0$ est un point d'intersection dès que ni $i$ ni $j$ n'est égal à 0; il y a alors 100 choix possibles pour $i$ et $j$, ce qui donne $\binom{100}{2}$ façons de choisir la paire $(i, j)$.

Enfin, pour calculer $P_{-1}$, on effectue de nouveau une étude de cas selon la parité : la probabilité que $i$ et $j$ soient tous deux impairs est $\frac{\binom{50}{2}}{\binom{101}{2}}$, et la probabilité qu'ils soient tous deux pairs est $\frac{\binom{51}{2}}{\binom{101}{2}}$. En les additionnant, on obtient $\frac{50 \cdot 50}{50 \cdot 101} = \frac{50}{101}$.

La valeur espérée est donc $\frac{50}{101} + 1 + \frac{99}{101} = \frac{250}{101}$.

Answer: $\boxed{\frac{250}{101}}$

# Section C

**C1** Pour tout entier $n \geq 2$, il existe un *système de numération* à base $n$, où les entiers positifs sont écrits à l'aide des chiffres $0, 1, \ldots, n-1$. Par exemple, dans le système de numération en base 16, également appelé système *hexadécimal*, les chiffres utilisés sont $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E$, et $F$, où les lettres $A, B, C, D, E$, et $F$ représentent respectivement les nombres $10, 11, 12, 13, 14$, et $15$.

Une suite de chiffres $\overline{abc}$ dans le système à base $n$ représente l'entier positif $an^2 + bn^1 + cn^0$. (Nous n'écrirons pas la barre au-dessus des nombres écrits dans le système standard à base 10.) Par exemple, le nombre 314 en base 10 peut s'écrire $\overline{13A}$ dans le système hexadécimal, car $1 \cdot 16^2 + 3 \cdot 16^1 + 10 \cdot 16^0 = 314$. En général, une suite de chiffres $\overline{a_k a_{k-1} \ldots a_0}$ en base $n$ représente l'entier positif $a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_1 n^1 + a_0 n^0$.

Pour ce problème, vous pouvez supposer que tout entier positif peut être représenté de manière unique en base $n$ pour tout $n \geq 2$.

(a) Écrivez le nombre 2025 en base 10 dans la base 5.

(b) Résolvez l'équation $x^2 - \overline{20}x + \overline{AF} = 0$ écrite dans le système hexadécimal. La réponse doit être donnée dans le système hexadécimal.

(c) Dans quels systèmes en base $n$ est-il vrai que $\overline{24}$ divise $\overline{2000}$?

---

**Solutions :**

(C1-a) **Solution 1:**

Pour écrire 2025 en base 5, il faut d'abord représenter 2025 comme une somme de puissances de 5. On remarque que $5^4 = 625$ et que $5^5 = 3125$. Comme 625 est contenu trois fois dans 2025, on a $2025 = 625 \cdot 3 + 150$. De plus, on constate que $150 = 125 + 25$. Ainsi, on obtient la décomposition complète $2025 = 3 \cdot 625 + 125 + 25$. On en déduit que $2025 = \overline{31100}_5$, c'est-à-dire que l'écriture de 2025 en base 5 est $\overline{31100}$.

---

**Solution 2:**

On peut utiliser une méthode de divisions successives et consigner les restes.

| Division | Quotient | Reste |
|---|---|---|
| $2025 \div 5$ | 405 | 0 |
| $405 \div 5$ | 81 | 0 |
| $81 \div 5$ | 16 | 1 |
| $16 \div 5$ | 3 | 1 |
| $3 \div 5$ | 0 | 3 |

On lit ensuite les restes de bas en haut pour obtenir $2025 = \overline{31100}_5$.

---

(C1-b) **Solution 1:**

Complétons le carré. On obtient

$$x^2 - \overline{20}x + \overline{100} = \overline{100} - \overline{AF}.$$

Afin de prendre la racine carrée du membre de droite, convertissons tout en base 10 pour plus de simplicité. On constate que $\overline{100}$ représente 256 et que $\overline{AF}$ représente $10 \cdot 16 + 15 = 175$, de sorte que le membre de droite est égal à $256 - 175 = 81$. On a donc

$$(x - \overline{10})^2 = 81 \quad \text{so} \quad x = \overline{10} \pm 9 = 16 \pm 9, \quad \text{or} \quad x = \overline{19}, \quad \& \quad x = \overline{7}.$$

---

**Solution 2:**

$\overline{20}$ (en base 16) $= 2 \cdot 16 = 32$. $\overline{AF}$ (base 16) $= A \cdot 16 + F = 10 \cdot 16 + 15 = 175$.

Il faut donc résoudre l'équation

$$x^2 - 32x + 175 = 0,$$

ce qui donne $x = 7$ et $x = 25$.

En convertissant ces valeurs dans le système hexadécimal, on obtient

$$x = 7 = \overline{7} \text{ (base 16)} \quad \text{et} \quad x = 25 = 1 \cdot 16 + 9 = \overline{19} \text{ (base 16)}.$$

---

(C1-c) **Solution 1:**

La condition est équivalente à $n \geq 5$ (afin que $\overline{24}$ et $\overline{2000}$ soient bien définis), et au fait que $2n + 4$ divise $2n^3$. Cela revient à dire que $n + 2$ divise $n^3$.

En effectuant la division polynomiale, on obtient

$$n^3 = (n + 2)(n^2 - 2n + 4) - 8,$$

de sorte que l'on doit avoir que $n + 2$ divise $-8$. Les possibilités sont alors

$$n + 2 = 1, \ 2, \ 4, \ 8,$$

puisque $n+2$ doit être positif. Le seul cas satisfaisant $n \geq 5$ est donc $n = 6$.

---

**Solution 2:** L'énoncé devient : $2n+4$ divise $2n^3$ lorsque $n$ est la base. Remarquons que si $p|(n+2)$, alors $p$ ne divise pas $n$ pour tout $p > 2$. Il s'ensuit que les seuls nombres premiers pouvant diviser $2n+4$ sont égaux à 2.

En posant $n = 2m$, on obtient

$$2n + 4 = 4(m+1) \quad \text{et} \quad 2n^3 = 16m^3.$$

Il faut donc que $m+1$ divise $4m^3$. Cela est possible pour $m = 1$ ou $m = 3$, ce qui donne $n = 2$ ou $n = 6$. Comme le système en base 2 n'utilise que les chiffres 0 et 1, l'énoncé "$\overline{24}$ divise $\overline{2000}$" n'a de sens que dans le système en base 6.

On peut le vérifier en convertissant les nombres en base décimale. En effet,

$$2 \cdot 6 + 4 = 16 = 2^4$$

divise

$$2 \cdot 6^3 = 2^4 \cdot 3^3.$$

---

**C2** En mathématiques, un anagramme d'un mot est une réorganisation de ses lettres, y compris celles qui donnent des mots sans aucun sens. Un mot est toujours un anagramme de lui-même. Par exemple, le mot $SON$ a six anagrammes : $NOS$, $NSO$, $ONS$, $OSN$, $SNO$, et $SON$.

(a) Combien d'anagrammes du mot $TENET$ commencent et se terminent par la lettre $T$?

(b) Combien d'anagrammes du mot $YOOHOO$ commencent et se terminent par la lettre $O$?

(c) Soit $N$ le nombre d'anagrammes du mot $ABRACADABRA$ qui commencent et se terminent par des lettres différentes. Déterminez, avec justification, le plus grand nombre premier qui divise $N$.

---

**Solutions**

(C2-a) Il n'y en a que $3 = \frac{3!}{2!}$: $TENET, TEENT, TNEET$.

---

(C2-b) La lettre répétée au début et à la fin doit être $O$. Il reste alors à permuter les lettres $YOOH$ au milieu : il y a

$$\frac{4!}{2!} = \binom{4}{2} \times \binom{2}{1} = 12$$

façons de le faire.

---

(C2-c) Étiquetons toutes les lettres du mot $A_1B_1R_1A_2CA_3DA_4B_2R_2A_5$. Il y a 11! façons de réarranger ces lettres distinguées, mais plusieurs permutations produisent le même mot. Par exemple, permuter $B_1$ et $B_2$ donne le même anagramme, mais serait compté deux fois si l'on distinguait les lettres. On corrige ce surcomptage en divisant : il y a donc

$$\frac{11!}{2! \cdot 2! \cdot 5!}$$

anagrammes distincts de `ABRACADABRA`. (C'est équivalent à $\binom{11}{5}\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{1}\binom{1}{1}$, obtenu en choisissant, parmi les 11 positions, lesquelles contiennent un $A$, lesquelles contiennent un $B$, lesquelles contiennent un $R$, etc.)

Combien de ces arrangements commencent et se terminent par la même lettre? La lettre répétée peut être $A$, $B$ ou $R$. Il reste alors 9 lettres au milieu (ni en première ni en dernière position). Il y a donc $\frac{9!}{5!2!}$ anagrammes de la forme

$$B\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_B,$$

$\frac{9!}{5!2!}$ anagrammes de la forme

$$R\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_R,$$

et $\frac{9!}{3!2!2!}$ anagrammes de la forme

$$A\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_A.$$

Par conséquent, il y a

$$\begin{aligned} N = \frac{11!}{5!2!2!} - \frac{9!}{5!2!} - \frac{9!}{5!2!} - \frac{9!}{3!2!2!} &= \frac{1}{5!2!2!}(11 \cdot 10 \cdot 9! - 9!(2! + 2! + 5 \cdot 4)) \\ &= \frac{9!}{5! \cdot 2 \cdot 2} \cdot (110 - 24) \\ &= 9 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 86 \\ &= 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 43 \\ &= 65016 \text{ anagrammes de } ABRACADABRA \end{aligned}$$

qui commencent et se terminent par des lettres différentes.

Le plus grand nombre premier qui divise $N$ est 43.

---

**C3** On dit d'un entier positif $N$ qu'il est *décalable* s'il existe un entier $d > 1$ tel que le produit $d \cdot N$ est obtenu en retirant certains des premiers chiffres de $N$ et en les déplaçant à la fin (dans le même ordre). Par exemple, $N = 157894736842105263$ est un nombre décalable comme

$$5 \cdot \mathbf{15}7894736842105263 = 78947368421052631\mathbf{5}.$$

(a) Montrez que tous les nombres décalables sont divisibles par 3.

(b) Soit $N$ un nombre décalable. Prouvez qu'il existe une infinité de nombres décalables divisibles par $N$.

(c) Trouvez, avec justification, tous les nombres décalables $N$ inférieurs à $10^{15}$ tels que le simple déplacement du premier chiffre à la fin produise un multiple de $N$ différent de $N$ lui-même.

---

**Solutions**

(C3-a) **Solution 1:**
Un nombre décalable $N$ est de la forme

$$N = a \cdot 10^{\alpha} + A,$$

où

$$\begin{aligned} 10^{\beta-1} &\le a < 10^{\beta}, \\ 10^{\alpha-1} &\le A < 10^{\alpha}, \\ 10^{\alpha+\beta-1} &\le N < 10^{\alpha+\beta}. \end{aligned}$$

De plus, on doit avoir $1 < d < 10$, faute de quoi $d \cdot N$ aurait plus de chiffres que l'original.

Dans l'exemple $N = 157894736842105263 = 15 \cdot 10^{16} + 7894736842105263$, $a = 15$, $A = 7894736842105263$, $\alpha = 16$, $\beta = 2$, $d = 5$.

Par conséquent,

$$N \cdot 10^{\beta} = A \cdot 10^{\beta} + a \cdot 10^{\alpha+\beta},$$

Les conditions du problème donnent

$$d \cdot N = A \cdot 10^{\beta} + a,$$

En soustrayant ces deux équations, on obtient

$$(10^{\beta} - d) \cdot N = (10^{\alpha+\beta} - 1) \cdot a.$$

Comme $1 < d < 10$, $9 \nmid (10^\beta - d)$, cependant il peut arriver que $3 \mid (10^\beta - d)$ (si $d = 4$ or $d = 7$). Puisque $9 \mid (10^{\alpha+\beta} - 1)$, nous concluons que $3 \mid N$.

---

**Solution 2:**
Tout entier $A = \sum_{n=0}^{M} d_n 10^n$ est congru à la somme de ses chiffres $\sum_{n=0}^{M} d_n$ modulo 9, puisque $10^n \equiv 1 \mod 9$ pour tout $n \geq 1$.

Comme $N$ et $dN$ ont exactement les mêmes chiffres $(\mod 9)$, on a

$$dN \equiv N(\mod 9),$$

ce qui implique

$$(d-1)N \equiv 0(\mod 9).$$

Comme $1 < d < 10$, on sait que $d - 1 \not\equiv 0 \pmod 9$. Il s'ensuit que $N$ doit être divisible par 3 (au moins).

---

(C3-b) **Solution:**
Supposons que $10^{k-1} < N < 10^k$, où $N$ est un nombre *décalable* tel que

$$d \cdot N = N'$$

satisfasse la condition. Posons alors

$$n = N \cdot \sum_{i=1}^{m} 10^{(i-1)k},$$

c'est-à-dire le nombre obtenu en juxtaposant $m$ copies de $N$. On a alors

$$d \cdot n = N' \cdot \sum_{i=1}^{m} 10^{(i-1)k}$$

qui est précisément le nombre obtenu en juxtaposant $m$ copies de $N'$, montrant que les mêmes chiffres qui ont été décalés lorsque nous avons effectué $d \cdot N$ sont également décalés lorsque nous effectuons $d \cdot n$.
Par exemple, si $d \cdot aA = Aa$, alors

$$d \cdot aAaAaA = AaAaAa.$$

(Ici, l'écriture $XY$ représente deux nombres $X$ et $Y$ juxtaposés.)

On obtient ainsi une famille infinie de nombres décalables.

---

(C3-c) **Solution 1:**
Dans ce cas, on a $1 \leq a < 10$ et $\alpha < 15$.

$$N = a \cdot 10^{\alpha} + A.$$

Alors,

$$d \cdot N = 10 \cdot A + a,$$

ce qui entraîne

$$(10 - d) \cdot N = (10^{\alpha+1} - 1) \cdot a.$$

Observons aussi que $d \cdot a < 10$.

Si $d = 7$ et $a = 1$, on obtient

$$3N = (10^{\alpha+1} - 1),$$

donc $N = 3...3$, ce qui n'est pas un nombre décalable.

Si $d = 4$ et $a = 2$, on obtient

$$6N = 2(10^{\alpha+1} - 1),$$

donc encore $N = 3...3$.

Si $d = 4$ et $a = 1$, on obtient

$$6N = (10^{\alpha+1} - 1),$$

ce qui n'admet aucune solution entière (par parité).

Ainsi, on peut supposer que $d \neq 4, 7$, et donc

$$9 \mid N.$$

Écrivons $N = 9n$. L'équation devient alors

$$(10 - d)\, n = \overbrace{111 \cdots 1}^{\alpha+1\ 1} \cdot a.$$

Observons qu'un nombre de la forme

$$\overbrace{111 \cdots 1}^{m\ 1}$$

est divisible par

$$\begin{cases} 3, & \text{si } m = 3, 6, 9, 12, 15, \\ 7, & \text{si } m = 6, 12, \\ 9, & \text{si } m = 9. \end{cases}$$

(Ici, on ne s'intéresse qu'à $\alpha < 15$, donc $m = \alpha + 1 < 16$.)

D'autre part,

$$10 - d = \begin{cases} 3, & \text{si } d = 7, \\ 7, & \text{si } d = 3, \\ 9, & \text{si } d = 1. \end{cases}$$

Comme on a exclu $d = 7$ et $d = 1$, il ne reste que le cas $d = 3$, qui correspond à $m = 6, 12$, c'est-à-dire aux cas où l'on peut diviser les deux côtés de l'équation par 7.

Pour $m = 6$. On a

$$(10 - d) \cdot n = 111\,111 \cdot a.$$

Si $d = 3$ et $a = 1$, alors $n = 15\,873$, donc $N = 142\,857$.
Si $d = 3$ et $a = 2$, alors $n = 31\,746$, donc $N = 285\,714$.
Si $d = 3$ et $a = 3$, alors $n = 47\,619$, donc $N = 428\,571$.
Cependant, le premier chiffre du dernier nombre $N = 428\,571$ est $4 \neq 3$, donc ce nombre ne satisfait pas aux exigences.

Pour $m = 12$. On a

$$(10 - d) \cdot n = 111\,111\,111\,111 \cdot a$$

Si $d = 3$ et $a = 1$, alors $n = 15\,873\,015\,873$, donc $N = 142\,857\,142\,857$.
Si $d = 3$ et $a = 2$, alors $n = 31\,746\,031\,746$, donc $N = 285\,714\,285\,714$.
Si $d = 3$ et $a = 3$, alors $n = 47\,619\,047\,619$, donc $N = 428\,571\,428\,571$.
Cependant, le premier chiffre du dernier nombre $N = 428\,571\,428\,571$ est $4 \neq 3$, donc ce nombre ne satisfait pas aux exigences.

En tout, il y a quatre nombres dans l'intervalle considéré. Les deux plus petits sont :

$$\begin{aligned} N_1 &= 142\,857 \qquad \text{avec} \qquad 3 \cdot 142\,857 = 428\,571, \\ N_2 &= 285\,714 \qquad \text{avec} \qquad 3 \cdot 285\,714 = 857\,142. \end{aligned}$$

Les deux autres peuvent aussi être obtenus à l'aide du résultat de (b) :

$$\begin{aligned} N_3 &= 142\,857\,142\,857, \\ N_4 &= 285\,714\,285\,714. \end{aligned}$$

**P.S.** Notons que les nombres 142 857, 285 714 et 428 571 obtenus ci-dessus sont des permutations cycliques de 142 857. Ce sont des nombres décalables : tous les produits $d \cdot N$ (tant que $d \cdot N < 10^6 - 1$) décalent des chiffres. Par exemple,

$$142\,857 \cdot 2 = 285\,714, \qquad 142\,857 \cdot 3 = 428\,571, \qquad 142\,857 \cdot 4 = 571\,428,$$

$$142\,857 \cdot 5 = 714\,285, \qquad 142\,857 \cdot 6 = 857\,142, \qquad 142\,857 \cdot 7 = 999\,999.$$

---

**Solution 2:**
On obtient, comme précédemment,

$$(10-d)N = (10^{\alpha+1}-1)a.$$

Observons que l'on doit avoir $d \geq 3$. En effet, si $d = 2$, alors $8 \mid (10^{\alpha+1}-1)a$ donc $a = 8$ et $10^{\alpha+1}-1$, ce qui est une contradiction.

Maintenant que l'on sait $d \geq 3$, on a

$$N < \frac{10^{\alpha+1}-1}{3},$$

car $3N$ doit avoir $\alpha$ chiffres et ne peut pas être égal à $10^{\alpha+1}-1$ (sinon $N$ serait composé uniquement de 3). En combinant cette inégalité, on obtient $10-d > 3a$. On est alors ramené à un nombre fini de cas : les seules possibilités pour $(d,a)$ sont

$$(3,1),\ (3,2),\ (4,1),\ (5,1),\ (6,1).$$

On peut éliminer les trois derniers cas en étudiant la divisibilité par 2 et par 5.

Dans les deux cas $(d,a) = (3,1)$ et $(3,2)$, on doit avoir que $10^{\alpha+1}-1$ est divisible par 7. Cela se produit précisément lorsque 6 divise $\alpha+1$, de sorte que, sous l'hypothèse $\alpha \leq 14$, on obtient $\alpha = 5$ et 11. Il ne reste alors qu'à résoudre pour $N$ dans chacun de ces cas, ce qui fournit les quatre réponses cherchées.

---

**Solution 3**:
Après avoir obtenu $N = a \cdot 10^\alpha + A$ et $dN = 10A + a$, on résout pour $A$ et l'on obtient

$$A = \frac{a}{10-d}(d \cdot 10^\alpha - 1) = \frac{ad}{10-d} \cdot \frac{d \cdot 10^\alpha - 1}{d}.$$

Or, comme $d > 1$, on a

$$A \leq 10^\alpha - 1 < 10^\alpha - \frac{1}{d} = \frac{d \cdot 10^\alpha - 1}{d}.$$

Il s'ensuit que

$$\frac{ad}{10-d} < 1,$$

ou

$$ad < 10 - d \qquad \Longleftrightarrow \qquad (a+1)d < 10.$$

Comme $a \geq 1$, on obtient $d \leq 4$.

**Cas 1 :** $d = 2$**.** Alors
$$A = \frac{a}{8}\,(2 \cdot 10^{\alpha} - 1),$$
et donc $8 \mid a$, ce qui force $a = 8$. Mais cela contredit $(a+1)d < 10$.

**Cas 2 :** $d = 4$**.** Alors
$$A = \frac{a}{6}\,(4 \cdot 10^{\alpha} - 1),$$
et donc $6 \mid a$, ce qui force $a = 6$. Mais cela contredit encore $(a+1)d < 10$.

**Cas 3 :** $d = 3$**.** Alors $(a+1)d < 10$ impose $a = 1, 2$.
$$A = \frac{a}{7}\,(3 \cdot 10^{\alpha} - 1),$$
donc
$$3 \cdot 10^{\alpha} = 1 \pmod 7 \Longrightarrow \alpha = 5 \pmod 6.$$
Cela donne $\alpha = 5, 11$ et, combiné avec $\alpha = 1, 2$, cela donne les 4 solutions.

---

**Solution 4:**
On écrit $N$ sous la forme
$$N = a \cdot 10^{\alpha} + A,$$
où $a \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ et $\alpha < 15$. Pour que $N$ soit *décalable*, on doit avoir
$$dN = 10A + a. \tag{1}$$
On remarque aussi que
$$da < 10, \tag{2}$$
car sinon $dN$ aurait plus de chiffres que $N$. L'équation (1) implique en particulier que si $d$ est pair, alors $a$ doit être pair. De plus, le cas $d = 5$ est impossible (car alors $a$ devrait être divisible par 5, ce qui contredit (2) et la condition $a \geq 1$).

Il reste donc à examiner les huit combinaisons suivantes :

- $d = 2$ et $a \in \{2, 4\}$;
- $d = 3$ et $a \in \{1, 2, 3\}$;
- $d = 4$ et $a = 2$;
- $d \in \{7, 9\}$ et $a = 1$.

Nous commençons par le cas $d = 3$ et $a = 1$. Le dernier chiffre de $3N$ est $a = 1$, ce qui donne la mise en place suivante :

$$\begin{array}{r} ???????w \\ \times 3 \\ -\,-\,-\,-\,- \\ ??????w1 \end{array}$$

Il est clair que $w = 7$ est le seul chiffre satisfaisant $w \times 3 = 1 \pmod{10}$. Ainsi, le dernier chiffre de $N$ est 7, et l'on passe à l'étape suivante de cet algorithme de "retour en arrière" :

$$\begin{array}{r} ??????u7 \\ \times 3 \\ -\,-\,-\,-\,- \\ ?????u71 \end{array}$$

Comme $7 \times 3 = 21$, $7 - 2 = 5$, et $5 \times 3 = 15$, le chiffre suivant doit être $u = 5$ :

$$\begin{array}{r} ?????v57 \\ \times 3 \\ -\,-\,-\,-\,- \\ ????v571 \end{array}$$

On continue de la même façon : $5 \times 3 = 15$, $5 - 1 = 4$, et $8 \times 3 = 24$, alors le chiffre suivant doit être $v = 8$ :

$$\begin{array}{r} ?????857 \\ \times 3 \\ -\,-\,-\,-\,- \\ ????8571 \end{array}$$

En répétant cette procédure deux fois de plus, on obtient

$$\begin{array}{r} ???142857 \\ \times 3 \\ -\,-\,-\,-\,- \\ ???428571 \end{array}$$

On a donc trouvé un premier nombre décalable satisfaisant les conditions de C3(c) : 142857. On peut s'arrêter ici, ou poursuivre le même algorithme pendant 6 étapes supplémentaires; on obtient alors

$$\begin{array}{r} ???142857142857 \\ \times 3 \\ -\,-\,-\,-\,- \\ ???428571428571 \end{array}$$

ce qui fournit un second nombre décalable : 142857142857. (On pourrait aussi l'obtenir à l'aide du résultat de C3(b).)

Considérons ensuite le cas $d = 3$ et $a = 2$. On commence par

$$\begin{array}{r} ???????w \\ \times 3 \\ - - - - - \\ ???????w2 \end{array}$$

Le chiffre suivant est $w = 4$, donc

$$\begin{array}{r} ??????u4 \\ \times 3 \\ - - - - - \\ ?????u42 \end{array}$$

Le chiffre suivant est alors $u = 1$ :

$$\begin{array}{r} ??????14 \\ \times 3 \\ - - - - - \\ ?????142 \end{array}$$

En poursuivant ainsi, on obtient deux autres nombres décalables : 285714 et 285714285714.

Nous affirmons que toutes les autres combinaisons de $a$ et $d$ ne produisent aucun nombre décalable. Considérons le cas $d = a = 3$ :

$$\begin{array}{r} ???????w \\ \times 3 \\ - - - - - \\ ???????w3 \end{array}$$

Le dernier chiffre de $N$ impose $w = 1$

$$\begin{array}{r} ??????u1 \\ \times 3 \\ - - - - - \\ ?????u13 \end{array}$$

Le chiffre suivant est $u = 7$

$$\begin{array}{r} ??????71 \\ \times 3 \\ - - - - - \\ ?????713 \end{array}$$

En continuant, on arrive finalement à

$$\begin{array}{r} ??1428571 \\ \times 3 \\ -\,-\,-\,-\,- \\ ?14285713 \end{array}$$

On retombe alors sur le chiffre 1 : la suite des chiffres devient périodique de période 6 :

$$\begin{array}{r} ??1428571428571 \\ \times 3 \\ -\,-\,-\,-\,- \\ ?14285714285713 \end{array}$$

Quel que soit le moment où l'on s'arrête dans cet algorithme, on n'obtient jamais un nombre décalable, car le chiffre 3 n'apparaît pas dans $N$ alors qu'il apparaît comme dernier chiffre de $3N$.

Considérons maintenant le cas $d = 7$ et $a = 1$. On a

$$\begin{array}{r} ????????? \\ \times 7 \\ -\,-\,-\,-\,- \\ ????????1 \end{array}$$

ce qui mène à

$$\begin{array}{r} ????????3 \\ \times 7 \\ -\,-\,-\,-\,- \\ ???????31 \end{array}$$

puis à

$$\begin{array}{r} ???????33 \\ \times 7 \\ -\,-\,-\,-\,- \\ ??????331 \end{array}$$

Cet algorithme ne peut produire que des nombres $N$ de la forme $333\dots3$ (le chiffre 3 répété $k$ fois), tandis que $3N$ se termine par $a = 1$. Ainsi, la combinaison $d = 7$ et $a = 1$ ne produit aucun nombre décalable.

La situation est exactement la même lorsque $d = 9$ et $a = 1$; on obtient

$$\begin{array}{r} ??????999 \\ \times 9 \\ \hline ?????9991 \end{array}$$

Le cas $d = 4$ et $a = 2$ mène au même résultat

$$\begin{array}{r} ??????333 \\ \times 4 \\ \hline ?????3332 \end{array}$$

Lorsque $d = 2$ et $a = 2$, on arrive à

$$\begin{array}{r} ???????w1 \\ \times 2 \\ \hline ?????w12 \end{array}$$

mais on ne peut pas poursuivre l'algorithme, car $2w \not\equiv 1 \pmod{10}$. Cette combinaison ne produit aucun nombre décalable.

Lorsque $d = 2$ et $a = 4$, on arrive à la même impasse après une étape supplémentaire :

$$\begin{array}{r} ??????w12 \\ \times 2 \\ \hline ????w124 \end{array}$$

Encore une fois, cette combinaison ne peut pas produire un nombre décalable.

Ainsi, les seuls nombres décalables satisfaisant les conditions de C3(c) sont les quatre nombres obtenus ci-dessus :

$$142857, \qquad 142857142857, \qquad 285714, \qquad 285714285714.$$

**C4** Véronique joue un jeu contre ses 2025 élèves. Tout d'abord, chaque élève pointe exactement un autre élève dans la salle. Plusieurs personnes peuvent pointer le même élève, et certains élèves peuvent n'être pointés par personne. Véronique voit qui a pointé vers qui.

Deuxièmement, Véronique choisit $N$ élèves pour quitter la salle.

Troisièmement, Véronique attribue un nombre à chacun des $2025 - N$ élèves restants, à la condition que si un élève en pointe un autre, ils doivent recevoir le même nombre. Si Véronique peut attribuer $k$ nombres distincts aux élèves, elle marque $k$ points.

Les élèves essaient de minimiser le nombre de points marqués par Véronique, et cette dernière essaie de maximiser le nombre de points qu'elle marque. En supposant un jeu optimal des deux côtés, quel score obtient-elle lorsque

(a) $N = 1$?

(b) $N = 100$?

(c) $N = 1000$?

---

**Solutions:**

Pour la partie (a), nous affirmons que la réponse est 1. Par défaut, Véronica peut toujours garantir de dire au moins un nombre en attribuant le même nombre à tous les étudiants encore présents dans la salle. Il reste donc à concevoir une stratégie permettant aux étudiants de se pointer les uns les autres.

Plaçons les étudiants en cercle et demandons à chacun de pointer vers l'étudiant immédiatement à sa gauche. Après que Véronica a retiré un étudiant arbitraire, les étudiants restants forment une chaîne : chaque étudiant pointe vers le suivant, et le dernier de la chaîne pointe vers l'étudiant qui a quitté la salle. Véronica est alors contrainte d'attribuer le même nombre à tous les étudiants restants.

Nous donnons maintenant la réponse pour un nombre général $N$. Sous un jeu optimal, le score de Véronica est égal à

$$\begin{cases} N & \text{si } N \in [1, 674], \\ 675 & \text{si } N \in [675, 1349], \\ 2025 - N & \text{si } N \in [1350, 2025]. \end{cases}$$

Ainsi, la réponse à la partie (b) est 100, et la réponse à la partie (c) est 675.

Afin de montrer que cette stratégie est optimale tant pour Véronica que pour les étudiants, il est commode de reformuler le problème en termes de théorie des graphes. Les étudiants forment un graphe à 2025 sommets et 2025 arêtes, avec la propriété qu'il existe une bijection entre les sommets et les arêtes telle que chaque arête est associée à l'un de ses sommets. Véronica retire ensuite $N$ sommets, et son score est le nombre de composantes connexes du graphe restant.

Dans ce langage, nous présentons d'abord la stratégie des étudiants. Numérotons les étudiants $1, 2, \ldots, 2025$.

Lorsque $N \in [1, 674]$, les étudiants se désignent mutuellement en cercle, comme à la partie (a), par exemple en faisant pointer l'étudiant $N$ vers l'étudiant $N+1$. Le graphe obtenu est alors un cycle. Supposons que Véronica retire les étudiants $a_1, a_2, \ldots, a_N$. Le graphe restant possède au plus $N$ composantes connexes, puisque chacun des étudiants

$$a_i + 1, a_i + 2, \ldots, a_{i+1} - 1$$

se trouve dans la même composante pour $i = 1, 2, \ldots, N-1$, et que les étudiants

$$a_N + 1, a_N + 2, \ldots, a_{2025}, a_1, \ldots, a_i - 1$$

appartiennent aussi à une seule composante. Les étudiants peuvent donc garantir que Véronica marque au plus $N$ points.

Lorsque $N \in [675, 1349]$, les étudiants se répartissent en groupes de 3 et, à l'intérieur de chaque groupe, se pointent mutuellement en cycle. Après le retrait des étudiants par Véronica, chaque groupe ne peut contribuer qu'à une seule composante connexe. Alors, Véronica ne peut marquer plus de 675 points.

Lorsque $N \geq 1350$, les étudiants peuvent adopter n'importe quelle stratégie : il restera $2025 - N$ étudiants, et Véronica ne peut donc marquer plus de $2025 - N$ points.

Nous décrivons maintenant la stratégie de Véronica. Elle applique un algorithme glouton consistant à retirer successivement un sommet de degré maximal, jusqu'à ce qu'elle ait retiré $N$ étudiants.

Si, à un moment donné, Véronica retire un sommet de degré 0, alors le graphe final ne contient plus d'arêtes, et son score est $2025 - N$. Ce score est supérieur ou égal à celui annoncé ci-dessus ; on peut donc supposer que Véronica ne retire jamais de sommet de degré 0.

Supposons que Véronica retire $k$ sommets de degré au moins 2, et $N - k$ sommets de degré 1. Supposons que, parmi les $k$ premiers sommets retirés, Véronica supprime $e$ arêtes. On fait alors les observations suivantes:

- $e \geq 2k$ (et donc $e - k \geq k$).
- Véronica retire exactement $(N - k) + e$ arêtes. Le graphe final possède donc $2025 - N$ sommets et $2025 - N + k - e$ arêtes. Comme un graphe ayant $a$ sommets et $b < a$ arêtes possède au moins $a - b$ composantes connexes, ce graphe admet au moins $e - k$ composantes connexes.
- Si $k = N$, alors $e - k \geq k = N$.
- Si $k \neq N$, alors après le retrait des $k$ premiers sommets, le graphe restant ne peut être formé que de sommets isolés et de paires de sommets reliées par une seule arête. Dans un tel graphe, on a $|V| \geq 2|E|$, où $|V|$ désigne le nombre de sommets et

$|E|$ le nombre d'arêtes. Dans notre situation, le graphe possède $2025 - k$ sommets et $2025 - e$ arêtes, d'où

$$2025 - k \geq 2(2025 - e),$$

ce qui se simplifie en $2e \geq 2025 + k$. Comme $e \geq 2k$, on obtient

$$3e \geq 2k + (2025 + k),$$

et donc $e - k \geq 675$.

- Dans tous les cas, Véronica marque au moins $\min(N, 675)$ points, qui est à nouveau supérieur ou égal au score que nous avons attribué à Véronica ci-dessus.

**Remarque :** Dans la stratégie de Véronica, il n'est pas nécessaire que le graphe réalise une bijection entre les arêtes et les sommets ; Véronica peut garantir son score à partir de n'importe quel graphe ayant 2025 sommets et 2025 arêtes.