



1. **[10 points]** Existe-t-il quatre droites dans un même plan, telles qu'aucune trois sont concourantes et aucune deux sont parallèles et telles que quatre particules puissent se déplacer le long de ces droites à des vitesses constantes non nulles (possiblement différentes) de sorte qu'à tout instant, les positions des quatre particules soient cocycliques ?
2. **[10 points]** Existe-t-il des nombres réels positifs a, b, c , non tous égaux, tels que $a^b = b^c = c^a$?
3. **[10 points]** Soit un point P situé à l'extérieur du cercle Γ . Les tangentes issues de P au cercle Γ touchent Γ en A et B . Une troisième droite passant par P coupe Γ en C et D , avec C situé entre P et D . Un point Q est situé sur la corde CD tel que $\angle DAQ = \angle PBC$. Montrez que $\angle DBQ = \angle PAC$.
4. **[15 points]** Soit p un nombre premier fixe et soient k et n des entiers naturels tels que $k \geq n$. On choisit k vecteurs v_1, \dots, v_k de manière uniforme au hasard (avec répétition possible) dans l'ensemble $\{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \{0, 1, \dots, p-1\}\}$. De plus, pour $1 \leq i \leq n$, soit v_{k+i} le vecteur ayant la valeur p sur la i -ième coordonnée et 0 ailleurs.
On dit que ces $k+n$ vecteurs engendrent \mathbb{Z}^n si, pour tout vecteur à composantes entières $v = (y_1, \dots, y_n)$, il existe des entiers c_1, \dots, c_{k+n} tels que $v = \sum_{i=1}^{k+n} c_i v_i$. On note $P(p, n, k)$ la probabilité que ces $k+n$ vecteurs engendrent \mathbb{Z}^n .
Alors il existe une constante c , qui dépend de p et de n , telle que $p^k(1 - P(p, n, k)) - c \rightarrow 0$ lorsque $k \rightarrow \infty$. Déterminez c en fonction de p et de n .
5. **[15 points]** Déterminez s'il existe une fonction surjective $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{N}$, telle que, pour tous réels positifs $a < b$, l'image de l'intervalle ouvert (a, b) par f soit un ensemble de la forme $\{1, 2, \dots, N\}$, où N est un certain entier positif fini.
On rappelle qu'une fonction $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{N}$ est dite *surjective* si, pour tout entier naturel M , il existe un réel strictement positif r tel que $f(r) = M$.
6. **[20 points]** Un ensemble T d'entiers positifs est donné. Pour un entier positif n , Alice et Bob jouent à un jeu qui commence avec un tas initial de n pierres. À tour de rôle, ils retirent m pierres du tas, où $m \in T$ et $m \leq n$. Le joueur qui prend la dernière pierre gagne. Si, à un moment donné, le nombre de pierres dans le tas est strictement inférieur à $\min T$, alors la partie est déclarée nulle. On dit qu'un entier n est *bon* si Alice peut garantir une victoire, *mauvais* si Bob peut garantir une victoire, et *neutre* si ni Alice ni Bob ne peuvent garantir une victoire.
Par exemple, si T est l'ensemble des nombres premiers, alors $n = 4$ est neutre et $n = 5$ est bon : dans la première partie, Alice peut garantir un match nul en retirant 3 pierres à son premier coup, et elle ne peut pas faire mieux, tandis que dans la seconde partie, elle peut retirer toutes les pierres à son premier coup et gagner.
(a) Montrez que si T est fini, alors l'ensemble des entiers bons est ultimement périodique : c'est-à-dire qu'il existe des entiers positifs N et p tels que, pour tout entier

- positif $n > N$, n est bon si et seulement si $n + p$ est bon.
- (b) Construisez un ensemble infini T tel que l'ensemble des entiers bons ne soit pas périodique : c'est-à-dire que, pour toute paire d'entiers positifs N et p , il existe un entier $n > N$ tel que exactement l'un des deux entiers n et $n + p$ soit bon.
7. **[20 points]** Déterminez le plus petit entier positif qui n'est pas un carré parfait et qui peut s'écrire sous la forme $\frac{a^2+b^2}{ab+1}$ pour certains nombres rationnels a et b tels que $ab \neq -1$.