

1. SEMAINE 1

Nous proposons deux problèmes de niveau débutant cette semaine.

Problème A

Trouvez tous les entiers à 3 chiffres tels que chacun est égal à 34 fois la somme de ses chiffres.

Solution:

Problème 1 de la XVIIIe olympiade italienne mathématique, paru dans Crux à [2005:217] . Nous présentons la solution par Robert Bilinski parue à [2006:386] .

Soit abc un nombre à trois chiffres. Alors

$$100a + 10b + c = 34(a + b + c) \implies$$

$$22a - 11c = 8b.$$

Par conséquent, nous obtenons que b est divisible par 11 et donc $b = 0$.

Vu que $b = 0$, nous obtenons

$$c = 2a.$$

Pour obtenir un nombre à 3 chiffres, nous avons besoin que $a \geq 1$. De plus, comme $c = 2a$ est un chiffre, $a \leq 4$.

Il existe 4 entiers satisfaisant ces conditions:

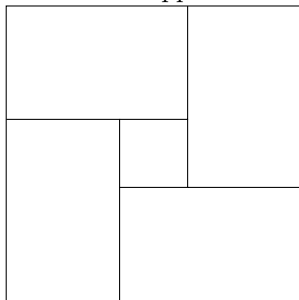
$$102, 204, 306, 408.$$

Problème B

Quatre rectangles identiques sont disposés dans un carré de façon à ce qu'ils enferment un carré plus petit. Soit S l'aire du grand carré et Q l'aire du petit carré. Si

$$\frac{S}{Q} = 9 + 4\sqrt{5}$$

déterminez le rapport des longueurs des côtés du rectangle.

**Solution:**

Problème M282 de Mayhem paru dans Crux à [2007:73-74]. Nous présentons la solution par des auteurs multiples parue à [2008:71-72].

Soit $x > y$ représentant les longueurs des deux côtés du rectangle. Alors, la longueur d'un côté du grand carré est $x + y$ et la longueur d'un côté du petit carré est $x - y$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \frac{(x+y)^2}{(x-y)^2} &= 9 + 4\sqrt{5} && \implies \\ \frac{x+y}{x-y} &= \sqrt{9 + 4\sqrt{5}} = \sqrt{4 + 4\sqrt{5} + (\sqrt{5})^2} = 2 + \sqrt{5} && \implies \\ x+y &= (2 + \sqrt{5})x - (2 + \sqrt{5})y && \implies \\ (3 + \sqrt{5})y &= (1 + \sqrt{5})x && \implies \\ \frac{x}{y} &= \frac{3 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} = \frac{(3 + \sqrt{5})(\sqrt{5} - 1)}{4} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \end{aligned}$$

ce qui est le nombre d'or.

2. SEMAINE 2

Problème

Étant donné un alphabet de trois lettres a, b, c , trouvez le nombre de mots à n lettres qui contiennent la lettre a un nombre pair de fois.

Solution: Problème 4 de la XIIe Olympiade mathématique italienne de 1996, paru dans Crux Mathematicorum à [1999:390]. Nous présentons la solution par Pierre Bornzstein, parue à [2001:430-431], modifiée légèrement.

Pour tout entier k tel que $0 \leq 2k \leq n$, calculons le nombre de mots de longueur n qui contiennent la lettre a exactement $2k$ fois. Les positions des lettres a peuvent être choisies de $\binom{n}{2k}$ façons. Après avoir mis les lettres a , pour chacune des $n - 2k$ positions restantes, nous avons deux choix de lettre, soit b soit c .

Par conséquent, il y a exactement

$$\binom{n}{2k} 2^{n-2k}$$

mots de longueur n qui contiennent la lettre a exactement $2k$ fois. Il en découle que le nombre de mots de longueur n qui contiennent la lettre a un nombre pair de fois est

$$\sum_{k=0}^{n/2} \binom{n}{2k} 2^{n-2k}.$$

Ensuite, la formule binomiale nous donne

$$3^n = (2 + 1)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} 2^{n-j}$$

$$1^n = (2 - 1)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^j 2^{n-j}.$$

En additionnant les deux dernières égalités, nous obtenons

$$3^n + 1 = 2 \sum_{k=0}^{n/2} \binom{n}{2k} 2^{n-2k}.$$

Par conséquent, le nombre de mots de longueur n qui contiennent la lettre a un nombre pair de fois est

$$\frac{3^n + 1}{2}.$$

La deuxième solution proposée par l'éditeur: Soit a_n et b_n les nombres de mots à n lettres contenant la lettre a un nombre pair et, respectivement, un nombre impair de fois. Alors,

$$a_n + b_n = 3^n.$$

Considérons maintenant un mot de longueur $n + 1$ qui contient la lettre a un nombre pair de fois. Il y a deux possibilités:

Cas 1: La dernière lettre est a .

Dans ce cas, le mot peut être obtenu à partir de l'un des b_n mots de longueur n qui contient la lettre a un nombre impair de fois en y joignant la lettre a à la fin.

Il en découle qu'il existe b_n mots de longueur $n + 1$ qui contiennent la lettre a un nombre pair de fois et qui se terminent en a .

Cas 2: La dernière lettre n'est pas a .

Dans ce cas, le mot peut être obtenu à partir de l'un des a_n mots de longueur n qui contient la lettre a un nombre pair de fois en y joignant soit la lettre b soit la lettre c à la fin.

Il en découle qu'il existe $2a_n$ mots de longueur $n + 1$ qui contiennent la lettre a un nombre pair de fois et qui ne se terminent pas en a .

Ceci démontre que

$$a_{n+1} = b_n + 2a_n = (3^n - a_n) + 2a_n = 3^n + a_n.$$

Une récurrence donne alors

$$\begin{aligned} a_n &= 3^{n-1} + a_{n-1} = 3^{n-1} + 3^{n-2} + a_{n-2} \\ &= \dots \\ &= 3^{n-1} + 3^{n-2} + \dots + 3^1 + a_1 \\ &= 3^{n-1} + 3^{n-2} + \dots + 3^1 + 2. \end{aligned}$$

En utilisant la formule géométrique

$$3^{n-1} + \dots + 3 + 1 = \frac{3^n - 1}{3 - 1},$$

nous obtenons

$$a_n = \frac{3^n + 1}{2}.$$

3. SEMAINE 3

Problème

Trouvez toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$2f(x) = f(x+y) + f(x+2y)$$

pour tous nombres réels $x \in \mathbb{R}$ et $y \geq 0$.

Solution:

Problème 1 du test de sélection de l'équipe de Roumanie (2011), jour 1, tel que publié dans Crux Mathematicorum [2012:405-406]. Nous présentons ici la solution commune de Titu Zvonaru et Neculai Stanciu, parue dans [2014:60-61].

En remplaçant $y \geq 0$ par $2y$, on a

$$2f(x) = f(x+2y) + f(x+4y).$$

Il s'ensuit que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \geq 0$, on a

$$f(x+y) + f(x+2y) = 2f(x) = f(x+2y) + f(x+4y) \implies f(x+y) = f(x+4y).$$

Soient $a < b$ deux réels. En résolvant

$$\begin{cases} x + y = a \\ x + 3y = b \end{cases}$$

on obtient

$$\begin{cases} y = \frac{b-a}{2} > 0 \\ x = \frac{3a-b}{2}. \end{cases}$$

En insérant ces valeurs dans $f(x+y) = f(x+4y)$ on obtient que

$$f(a) = f(b) \quad \forall a < b.$$

Il s'ensuit que f est une fonction constante.

Il est clair que toute fonction constante $f(x) = c$ satisfait l'équation donnée.

4. SEMAINE 4

Problème Trouvez tous les polynômes de la forme $x^3 + mx + 6$ ayant 3 racines entières.

Solution: Problème 2 du concours de l'Association Mathématique du Québec, niveau secondaire, 2010, paru dans Crux Mathematicorum [2010:417–419]. Nous présentons la solution suggérée dans le commentaire de l'éditeur parue dans [2011:262].

Nous allons démontrer que l'unique polynôme satisfaisant ces propriétés est

$$x^3 - 7x + 6.$$

Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$ les trois solutions d'un tel polynôme. Alors,

$$\begin{aligned} x^3 + mx + 6 &= (x - a)(x - b)(x - c) \\ &= x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x - abc. \end{aligned}$$

En comparant les coefficients, il suit que

$$\begin{aligned} a + b + c &= 0; \\ abc &= -6. \end{aligned}$$

Puisque abc est négatif, ou bien exactement un entier parmi a, b, c est négatif, ou bien tous les trois sont négatifs. Puisque leur somme est égale à zéro, on déduit qu'exactly un de a, b, c est négatif. Sans perte de généralité, on peut supposer

$$a < 0 < b \leq c.$$

Puisque $abc = -6$, on a que $a \in \{-6, -3, -2, -1\}$ et $b, c \in \{1, 2, 3, 6\}$. On analyse les cas selon les valeurs possibles de a :

Cas 1: $a = -1$. Alors, $bc = 6$ et $a + b + c \neq 0$.

Cas 2: $a = -2$. Alors, $bc = 3$ et donc $b = 1, c = 3$ et à nouveau $a + b + c \neq 0$.

Cas 3: $a = -3$. Alors, $bc = 2$ et donc $b = 1, c = 2$. Dans ce cas,

$$P(x) = (x - 1)(x - 2)(x + 3) = x^3 - 7x + 6$$

et donc $m = -7$.

Cas 4: $a = -6$. Alors, $bc = 1$ et donc $b = c = 1$ et à nouveau $a + b + c \neq 0$.

La seule solution est donc $m = -7$.

5. SEMAINE 5

Problème

Trouvez toutes les paires d'entiers positifs (x, k) satisfaisant

$$3^k - 1 = x^3.$$

Solution: Problème 6(a) de la XV Gara Nazionale di Matematica 1999, tel que publié dans *Crux Mathematicorum* [2002:482]. Nous présentons ici la solution de Michael Bataille, parue dans [2005:39] et modifiée par l'éditeur.

On a

$$3^k = x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1).$$

Il existe alors un entier positif n tel que

$$3^n = x^2 - x + 1.$$

Soit r le reste de la division de x par 3. On distingue deux cas:

Cas 1: $r = 0$ ou $r = 1$. Dans ce cas, 3 divise $x(x - 1) = x^2 - x$, donc $x^2 - x + 1$ n'est pas divisible par 3. Il s'ensuit que 3^n n'est pas divisible by 3 et donc $n = 0$. Ceci implique que $x = 0$ ou $x = 1$. En résolvant pour k , on trouve que k n'est pas un entier positif. Il n'y a donc aucune solution dans ce cas.

Cas 2: $r = 2$. Dans ce cas, il existe un entier m tel que $x = 3m + 2$. Il s'ensuit que

$$3^n = (3m + 2)^2 - (3m + 2) + 1 = 9m^2 + 12m + 4 - 3m - 2 + 1 = 9(m^2 + m) + 3.$$

Puisque le côté droit est divisible par 3 mais pas par 9, on a que $n = 1$. Par conséquent,

$$3 = 3^1 = x^2 - x + 1 \implies x = -1 \text{ ou } x = 2.$$

Puisque x est un entier positif, on a que $x = 2$. En insérant $x = 2$ dans l'équation de départ, on trouve que

$$3^k - 1 = 2^3 = 8 \implies k = 2.$$

Il s'ensuit que la seule solution est $k = 2, x = 2$.

6. SEMAINE 6

Problème

Soient m, n deux entiers positifs tels que $m^2 + n^2 - m$ soit divisible par $2mn$. Démontrez que m est le carré d'un entier.

Solution:

Problème 1 du second jour de l'olympiade mathématique Suisse (1999), parue dans Crux Mathematicorum [2002:130]. Nous présentons la solution de Pierre Bornsztajn, parue dans [2004:282], détaillée par l'éditeur.

Il existe un entier k tel que

$$m^2 + n^2 - m = 2kmn,$$

ou de manière équivalente

$$n^2 - 2kmn + m^2 - m = 0.$$

En résolvant pour n on obtient

$$n_{1,2} = \frac{2km \pm \sqrt{4k^2m^2 - 4m^2 + 4m}}{2} \in \mathbb{Z}.$$

Il suit que la quantité

$$4k^2m^2 - 4m^2 + 4m = 4m(k^2m - m + 1)$$

est un carré parfait.

Afin de démontrer que m est le carré d'un entier, il suffit de montrer que dans la factorisation en nombres premiers de m , chaque facteur premier p apparaît à une puissance paire.

Soit p un diviseur premier de m et soit $j \geq 1$ la puissance de p dans la factorisation de m .

Nous subdivisons le problème en deux cas.

Cas 1: $p = 2$.

Dans ce cas m est pair et donc $k^2m - m + 1$ est impair. Il suit que la puissance de 2 dans $4m(k^2m - m + 1)$ est $2 + j$. Puisque $4m(k^2m - m + 1)$ est un carré parfait, on obtient que $j + 2$ est pair et donc que j est pair.

Cas 2: $p \neq 2$.

Alors, p ne divise pas 4. De plus, p divise m et donc p divise $k^2m - m$. Il suit que p ne divise pas $k^2m - m + 1$.

On en déduit que la puissance de p dans $4m(k^2m - m + 1)$ est j . Puisque $4m(k^2m - m + 1)$ est un carré parfait, j est pair.

Ceci termine la démonstration.

Note de l'éditeur: La seconde partie de la démonstration ci-dessus montre en fait que pour a, b deux entiers, si $4ab$ est un carré parfait et a, b sont premiers entre eux, alors a et b sont des carrés parfaits.

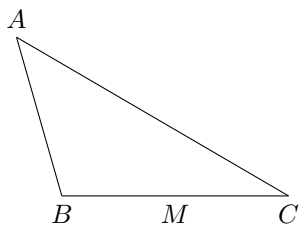
7. SEMAINE 7

Problème

Dans un triangle ABC , on a $\angle BAC = 45^\circ$ et $\angle ACB = 30^\circ$. Soit M le point milieu du côté BC .

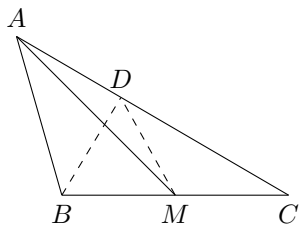
Montrez que $\angle AMB = 45^\circ$ et que

$$BC \cdot AC = 2AM \cdot AB.$$

**Solution:**

Problème 5 de la Olimpiada Matemática Española (2005), tel que publié dans *Crux Mathematicorum* [2008:342]. Nous présentons ici la solution de George Apostolopoulos, parue dans [2009:442] et modifiée légèrement.

Soit D le point de AC tel que $BD \perp AC$.



Comme $\angle ADB = 90^\circ$ et $\angle BAD = 45^\circ$, le triangle ABD est isocèle. Il s'ensuit que

$$AD = DB.$$

Maintenant, puisque le triangle BDC est un triangle rectangle, le centre de son cercle circonscrit est le point milieu M de l'hypoténuse. Donc

$$MB = MC = MD.$$

De plus, comme BDC est un triangle rectangle et $\angle BCD = 30^\circ$, on a

$$BD = \frac{1}{2}BC = BM.$$

Par conséquent,

$$AD = BD = MB = MC = MD.$$

Comme BMD est un triangle équilatéral, on a

$$\angle BDM = 60^\circ$$

$$\angle ADM = 150^\circ$$

$$\angle DMA = \frac{1}{2}(180^\circ - 150^\circ) = 15^\circ$$

$$\angle AMB = 60^\circ - 15^\circ = 45^\circ,$$

ce qui démontre la première partie du problème.

Pour la deuxième partie, remarquons d'abord que

$$\angle AMC = 180^\circ - 15^\circ - 30^\circ = 135^\circ.$$

Donc, d'après la loi des sinus, on a

$$\frac{AB}{\sin(30^\circ)} = \frac{BC}{\sin(45^\circ)} \quad \text{et}$$

$$\frac{AC}{\sin(135^\circ)} = \frac{AM}{\sin(30^\circ)},$$

ce qui se simplifie en

$$\frac{AB}{BC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{AM}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Par conséquent,

$$BC \cdot AC = (AB\sqrt{2})(AM\sqrt{2}) = 2AB \cdot AM.$$

8. SEMAINE 8

Problème

Trouvez tous les entiers n ayant la propriété suivante : Il est possible de colorer toutes les arêtes et diagonales d'un n -gone convexe avec n couleurs données, de telle sorte que

- (i) Chaque arête et chaque diagonale soit colorée d'une seule couleur;
- (ii) Pour chaque choix de 3 couleurs distinctes, il existe un triangle dont les sommets sont des sommets du n -gone et dont les arêtes sont colorées avec ces trois couleurs.

Solution:

Problème 5 de l'Olympiade Mathématique Chinoise, parue dans Crux Mathematicorum [2011:353-354]. Nous présentons la solution d'Olivier Geupel, parue dans [2012:318-319], modifiée par l'éditeur.

Nous démontrons qu'un entier $n \geq 3$ a la propriété désirée si et seulement si n est impair.

D'abord, soit n un entier satisfaisant cette propriété. Puisqu'il y a $\binom{n}{3}$ choix de trois couleurs parmi n et $\binom{n}{3}$ triangles formés par les sommets du polygone, chacun de ces triangles doit être coloré de manière différente. De plus, aucun triangle ne peut contenir deux arêtes de la même couleur.

Choisissons une couleur c . Il y a exactement $\binom{n-1}{2}$ triplets de couleurs contenant cette couleur. Ceci signifie que la couleur c apparaît dans exactement $\binom{n-1}{2}$ triangles.

Ensuite, soit k le nombre d'arêtes de couleur c . Puisqu'aucun triangle ne peut contenir deux arêtes de la même couleur, pour chacune des k arêtes on obtient exactement $n-2$ triangles contenant cette arête. Puisque ces triangles sont distincts, nous avons au total $k \cdot (n-2)$ triangles contenant une arête de couleur c . Il suit que

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{2} &= k \cdot (n-2) & \implies \\ n-1 &= 2k \end{aligned}$$

et donc n est impair.

Maintenant, supposons que n est impair.

On utilise les entiers modulo n comme couleurs : on colore l'arête/diagonale $P_i P_j$ avec la couleur $i + j \pmod{n}$.

Soient $i, j, k \pmod{n}$ distincts et soit $n = 2p - 1$. Remarquons que

$$2p = n + 1 \equiv 1 \pmod{n}.$$

Choisissons $1 \leq q, r, s$ tels que

$$\begin{cases} q &\equiv p(i + j - k) \pmod{n} \\ r &\equiv p(i + k - j) \pmod{n} \\ s &\equiv p(j + k - i) \pmod{n} \end{cases} .$$

Alors, q, r, s sont distincts et les arêtes du triangle $P_qP_rP_s$ sont colorées avec les couleurs:

$$\begin{aligned} q + r &\equiv 2pi \equiv i \pmod{n} \\ q + s &\equiv 2pj \equiv j \pmod{n} \\ r + s &\equiv 2pk \equiv k \pmod{n}. \end{aligned}$$

Ceci termine la démonstration.

Note de l'éditeur : Il y a une manière géométrique élégante d'interpréter ce coloriage pour n impair : lorsque n est impair, le n -gone régulier $P_1P_2 \dots P_n$ a la propriété que chacune de ses diagonale est parallèle à exactement un de ses cotés. Nou pouvons donc colorer les n côtés $P_1P_2, P_2P_3, \dots, P_nP_1$ avec n couleurs distinctes, et colorer chaque diagonale de la couleur de l'unique côté parallèle à celle-ci.

Avec ce coloriage, P_iP_j et P_kP_l ont la même couleur si et seulement si $P_iP_j \parallel P_kP_l$.

Ceci implique immédiatement que $P_iP_jP_k$ a des arêtes de couleurs distinctes. De plus, deux triangles distincts $P_iP_jP_k$ et $P_qP_rP_s$ ne peuvent pas être colorés de la même manière car dans ce cas ils seraient parallèles (*Tentez de trouver pourquoi c'est impossible pour n impair*). Donc, chacun des $\binom{n}{3}$ triangles utilise un des $\binom{n}{3}$ choix de couleurs potentiels. Il suit que chaque triplet de couleur est utilisé.