1. Semaine 1

Cette semaine, on commence par deux questions de niveau débutant pour s'échauffer.

Problème A:

Déterminez toutes les paires (x, y) de nombres réels qui satisfont :

$$\begin{cases} x^3 + y^3 & = 7 \\ xy(x+y) & = -2 \end{cases} .$$

Solution :

Problème 1 des Olympiades allemandes de mathématiques, paru dans Crux Mathematicorum [2006:279]. Nous présentons la solution de Pierre Bornsztein parue dans [2007:287].

Toute paire de nombres réels de ce type doit satisfaire

$$(x+y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x+y) = 7 - 6 = 1 .$$

Par conséquent, $x + y = 1$. La deuxième équation implique que $xy = -2$ et donc que x et y doivent être les deux racines de

$$Z^2 - Z - 2 = 0 .$$

Il s'ensuit que les seules solutions potentielles au problème sont $(x, y) = (-1, 2)$ et $(x, y) = (2, -1)$. Il est facile de voir que ces deux solutions potentielles sont effectivement des solutions.

Par conséquent, les seules paires de nombres réels qui satisfont au conditions susmentionnées sont

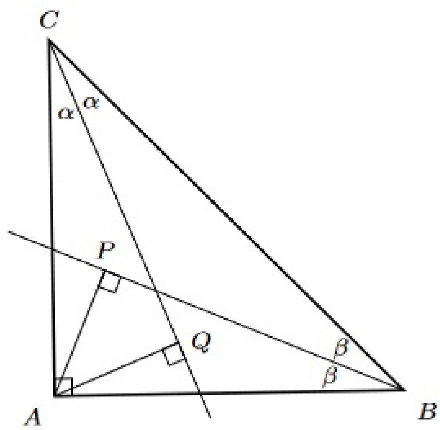
$$\{(-1, 2); (2, -1).\}$$

Problème B:

Le triangle ABC vérifie $\angle BAC = 90°$. Les pieds des perpendiculaires de A aux bissectrices internes de $\angle ABC$ et $\angle ACB$ sont respectivement P et Q. Déterminez la mesure de $\angle PAQ$.

Solution :

Problème M483 du Mathematical Mayhem paru dans Crux Mathematicorum [2011:136]. Nous présentons la solution de Gusnadi Wiyoga parue dans [2012:45].



$$\begin{aligned}\angle PAQ &= \angle PAB - \angle QAB = \angle PAB - (\angle CAB - \angle CAQ)\\ &= (90° - \beta) - (90° - (90° - \alpha)) = 90° - (\alpha + \beta)\\ &= 90° - 45° = 45°\ .\end{aligned}$$

2. Semaine 2

Problème Trouvez tous les triplets d'entiers positifs (x, y, z) tels que

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{4}{5} .$$

Solution : Problème 23 de la liste des problèmes proposés pour la 26ème Olympiade Internationale de Mathématiques en Finlande qui est paru dans Crux Mathematicorum[1985:307]. Nous présentons la solution de Ed Doolittle, George Evagelopoulos et Bob Prielipp qui a été publiée dans [1988:45].

Puisque l'équation est symétrique en (x, y, z), on peut trouver les solutions pour lesquelles $x \leq y \leq z$, et par permutations trouver toutes les solutions.

Soit (x, y, z) une solution avec $x \leq y \leq z$. Alors

$$\frac{4}{5} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} .$$

Ainsi,

$$\frac{3}{x} \geq \frac{4}{5} \Longrightarrow x \leq \frac{15}{4} .$$

Puisque x est un entier, on obtient $x \leq 3$. Maintenant, $x = 1$ est clairement impossible. On doit donc avoir $x = 2$ ou $x = 3$.

Cas 1 : Si $x = 2$ alors

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{4}{5} - \frac{1}{2} = \frac{3}{10} . \tag{1}$$

Dans le même ordre d'idées que ci-dessus,

$$\frac{2}{y} \geq \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{3}{10} \Longrightarrow y \leq \frac{20}{3} .$$

Il s'ensuit que $2 = x \leq y \leq 6$ donne 5 choix possibles pour y. Seuls $y = 4$ et $y = 5$ fonctionnent, donnant les solutions

$$(2, 4, 20) \text{ et } (2, 5, 10) .$$

Cas 2 : Si $x = 3$ alors

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{4}{5} - \frac{1}{3} = \frac{7}{15} . \tag{2}$$

Dans le même ordre d'idées que ci-dessus,

$$\frac{2}{y} \geq \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{7}{15} \Longrightarrow y \leq \frac{30}{7} .$$

Il s'ensuit que $3 = x \leq y \leq 4$ donne 2 choix potentiels pour y. Aucun ne fonctionne.

Cela signifie que tous les triples sont $(2, 4, 20); (2, 5, 10)$ et leurs permutations.

Note de la rédaction :

- Il s'agit d'une technique standard pour résoudre une équation de la forme

$$F(X_1, \dots X_n) = C$$

dans les entiers positifs en examinant toutes les façons possibles dont les variables sont ordonnées, et en liant l'expression que nous voulons rendre égale à une constante du haut et/ou du bas par une expression dans une seule variable. Cela nous conduit souvent à un nombre fini de valeurs potentielles pour cette variable, et chaque valeur potentielle conduit à une équation similaire avec une variable en moins. Itérer cet argument conduit à la solution.

Si F est symétrique dans $X_1, \ldots, X_n$ on peut toujours supposer sans perte de généralité que $X_1 \leq X_2 \leq \ldots \leq X_n$. Sinon, des cas multiples (mais un nombre fini de cas !) doivent être considérés.

- (1) peut également être résolue de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{4}{5} - \frac{1}{2} = \frac{3}{10} &\Longrightarrow \\ \frac{y+z}{yz} = \frac{3}{10} &\Longrightarrow \\ 3yz - 10y - 10z = 0 &\Longrightarrow \\ 9yz - 30y - 30z = 0 &\Longrightarrow \\ (3y-10)(3z-10) = 100 \ . & \end{aligned}$$

et en considérant toutes les factorisations possibles de 100 en produit d'entiers. Notez ici que $3x - 10$ et $3y - 10$ peuvent être négatifs !

Les deux solutions $(y, z) = (4, 20)$ et $(y, z) = (5, 10)$ proviennent des factorisations

$$\begin{aligned} 2 \cdot 50 &= 100 \\ 5 \cdot 20 &= 100 \ . \end{aligned}$$

(2) peut être résolue de la même manière.

3. Semaine 3

Problème Soit a, b, c et d des nombres réels non nuls. Prouvez que le polynôme

$$P(X) = X^6 + aX^3 + bX^2 + cX + d$$

ne peut avoir six racines réelles.

Solution : Problème 2 de l'Olympiade indienne de mathématiques 1989, paru dans Crux Mathematicorum [1990:133] . Nous présentons la solution de J. Lou et Michael Selby, parue dans [1992:6].

Supposons par contradiction que $P(X)$ a six racines réelles et étiquetons les racines $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6$. Alors, $P(X)$ est divisible par le polynôme

$$(X - r_1)(X - r_2)(X - r_3)(X - r_4)(X - r_5)(X - r_6) \ .$$

Cela signifie qu'il existe un polynôme $Q(X)$ tel que

$$P(X) = Q(X)(X - r_1)(X - r_2)(X - r_3)(X - r_4)(X - r_5)(X - r_6) \ .$$

En comparant les degrés, on déduit que Q doit être un polynôme constant. En comparant les coefficients de X^6, on trouve que la constante doit être 1. Par conséquent,

(3)
$$X^6 + aX^3 + bX^2 + cX + d = P(X) = (X-r_1)(X-r_2)(X-r_3)(X-r_4)(X-r_5)(X-r_6) \ .$$

Maintenant, en développant du côté droit et en comparant les coefficients de X^5 et X^4, respectivement, on obtient

$$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 + r_6 = 0$$
$$r_1r_2 + r_1r_3 + \ldots + r_5r_6 = 0 \ .$$

Il s'ensuit que

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r_4^2 + r_5^2 + r_6^2 = (r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 + r_6)^2 - 2\,(r_1r_2 + r_1r_3 + \ldots + r_5r_6) = 0$$

Puisque $r_1, \ldots, r_6$ sont des nombres réels, on obtient $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = r_5 = r_6 = 0$. Mais (3) donne alors

$$a = b = c = d = 0$$

ce qui est une contradiction.

Puisque nous avons obtenu une contradiction, l'hypothèse voulant que $P(X)$ ait six racines réelles est fausse.

Note de la rédaction : Les relations que nous avons utilisées ci-dessus sont un cas particulier de ce que l'on appelle les **formules de Viète**. Comme elles constituent un outil très utile pour traiter les polynômes, passons-les brièvement en revue ci-dessous.

Considérons un polynôme

$$P(X) = a_nX^n + \ldots + a_1X + a_0$$

de degré n (ce qui signifie que $a_n \neq 0$) à coefficients réels.

Supposons que le polynôme ait n racines distinctes $r_1, \ldots, r_n$ (ce qui, selon le théorème fondamental de l'algèbre, se produit toujours dans les nombres complexes !)

De la même manière que dans le cas précédent, on peut affirmer que

$$P(X) = a_n(X - r_1)(X - r_2) \ldots (X - r_n) \ .$$

En développant et en égalisant les coefficients, on obtient les formules de Viète, qui relient $a_0, \ldots, a_n$ à $r_1, \ldots, r_n$:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + \ldots + r_n & = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\ r_1 r_2 + r_1 r_3 + \ldots + r_{n-1} r_n & = \frac{a_{n-2}}{a_n} \\ r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + \ldots + r_{n-2} r_{n-1} r_n & = -\frac{a_{n-3}}{a_n} \\ \ldots & \ldots \\ r_1 r_2 \ldots r_n & = (-1)^n \frac{a_0}{a_n} \ . \end{cases}$$

4. Semaine 4

Cette semaine, nous examinons une équation fonctionnelle.

Problème

Trouvez toutes les fonctions f définies pour tous les nombres réels non nuls satisfaisant les deux conditions suivantes :

(a) Pour tout x non nul, on a

$$f(x) = xf(\frac{1}{x})$$

(b) Pour toutes les paires (x, y) de nombres réels non nuls avec $x + y \neq 0$ on a

$$f(x) + f(y) = 1 + f(x + y)$$

Solution :

Problème 4 de l'Olympiade Mathématique d'Australie 1991, paru dans Crux Mathematicorum [1992:129]. Nous présentons une solution de la rédaction.

Soit z un nombre non nul quelconque. En fisant $x = y = \frac{1}{2z}$ dans (b), on obtient

$$2f(\frac{1}{2z}) = 1 + f(\frac{1}{z}) .$$

Ensuite, par (a) on a

$$2zf(\frac{1}{2z}) = f(2z)$$

$$zf(\frac{1}{z}) = f(z) .$$

Par conséquent,

$$f(2z) = 2zf(\frac{1}{2z}) = z + zf(\frac{1}{z}) = z + f(z) .$$

D'autre part, par (b) on a aussi

$$2f(z) = 1 + f(2z) .$$

Cela nous donne

$$1 + z + f(z) = 1 + f(2z) = 2f(z)$$

et donc, la seule solution potentielle est

$$f(z) = z + 1 .$$

Il est facile de vérifier que la fonction $f(z) = z + 1$ satisfait bien (a) et (b). Par conséquent, la seule fonction satisfaisant (a) et (b) est $f(z) = z + 1$.

5. Semaine 5

Problème

Six musiciens participent à un festival de musique. À chaque concert, certains d'entre eux jouent de la musique et les autres écoutent. Quel est le nombre minimal de concerts nécessaire afin que chaque musicien écoute tous les autres ?

Solution :

Problème 3 de la XXXIIIe Olympiade espagnole de mathématiques, paru dans Crux Mathematicorum [2000:196]. Nous présentons, sous une forme légèrement modifiée, la solution de Pierre Bornsztein qui est apparue dans [2002:296-297].

Désignons les musiciens par A, B, C, D, E et F. Chaque fois qu'un musicien écoute un autre musicien, on parlera d'une *interaction.* Comme chacun des six musiciens doit écouter chacun des cinq autres musiciens, il doit y avoir au moins 30 interactions différentes.

Examinons maintenant le nombre possible d'interactions dans chaque concert.

Nombre de musiciens jouant	Nombre de musiciens écoutant	Nombre d'interactions
1	5	5
2	4	8
3	3	9
4	2	8
5	1	5
6	0	0

Par conséquent, pour chaque concert, il y a au plus 9 interactions différentes. Comme nous avons besoin de 30 interactions différentes, le nombre de concerts doit être d'au moins 4.

Or, 4 est possible, comme le montre le tableau ci-dessous.

	Joue	Écoute
Concert 1	ABC	DEF
Concert 2	AEF	BCD
Concert 3	BDF	ACE
Concert 4	CDE	ABF

Par conséquent, le nombre minimal de concerts est de 4.

6. Semaine 6

Problème Soit a, b et c des entiers positifs tels que

$$\frac{a\sqrt{3}+b}{b\sqrt{3}+c}$$

est un nombre rationnel. Montrez que

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}$$

est un entier.

Solution :

Problème 2 du Concours de mathématiques des lycées finlandais 2004, épreuve finale, paru dans Crux Mathematicorum [2007:85], dont la solution par Geoffrey A. Khandall est parue dans [2008:31]. Nous présentons une solution alternative de l'équipe de rédaction.

Soit

$$r := \frac{a\sqrt{3}+b}{b\sqrt{3}+c} \ .$$

Alors

$$a\sqrt{3}+b = br\sqrt{3}+cr \Longrightarrow$$
$$(a-br)\sqrt{3} = cr-b \ .$$

On doit avoir $a-br=0$, car sinon

$$\sqrt{3} = \frac{cr-b}{a-br}$$

serait un nombre rationnel.

Mais si $a-br=0$ alors

$$cr-b = (a-br)\sqrt{3} = 0 \ .$$

Par conséquent,

$$b = cr$$
$$a = br = cr^2 \ .$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c} = \frac{c^2r^4+c^2r^2+c^2}{cr^2+cr+c} &= c\frac{r^4+r^2+1}{r^2+r+1} \\ &= c\frac{(r^4+2r^2+1)-r^2}{r^2+r+1} = c\frac{(r^2+1)^2-r^2}{r^2+r+1} = c\frac{(r^2+1+r)(r^2+1-r)}{r^2+r+1} \\ &= c(r^2+1-r) = cr^2-cr+c = a-b+c\end{aligned}$$

qui est un nombre entier.

7. Semaine 7

Problème

Soit n un entier positif. Prouvez que l'équation

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{n}$$

admet une solution (x, y) où x et y sont des entiers positifs si et seulement s'il existe un entier $m>1$ tel que m^2 divise n.

Solution:

Problème 3 du jour 2 des Olympiades nationales des sciences d'Indonésie 2012, paru dans Crux Mathematicorum [2013:166-167], dont la solution par Michel Bataille est parue dans [2014:244]. Nous présentons une solution alternative de l'équipe de rédaction.

S'il existe un entier $m>1$ tel que m^2 divise n, on peut écrire $n=km^2$ pour un entier positif k. Alors, $x=k(m-1)^2, y=k$ satisfont

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=(m-1)\sqrt{k}+\sqrt{k}=m\sqrt{k}=\sqrt{km^2}=\sqrt{n}\ .$$

Inversement, supposons qu'il existe des entiers positifs x et y tels que

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{n}\ .$$

En élevant les deux côtés au carré, on obtient

$$n=x+y+2\sqrt{xy}$$

ce qui implique que $2\sqrt{xy}$ est un entier. Puisque x et y sont des entiers, il s'ensuit que xy est le carré d'un entier que nous désignerons par k.

Soit $d=\mathrm{PGCD}(x, y)$. Il existe alors des entiers relativement premiers x' et y' tels que

$$\begin{cases} x &= dx' \\ y &= dy' \end{cases} .$$

Il s'ensuit que

$$k^2=xy=d^2x'y'\ .$$

Comme $\mathrm{PGCD}(x', y')=1$, x' et y' doivent avoir des facteurs premiers distincts. Alors, tout diviseur premier de x' (ou y' respectivement) doit apparaître dans x' (ou y' respectivement) avec une puissance paire.

Cela implique que $x'=m^2$ et $y'=l^2$ pour certains entiers positifs l et r. Par conséquent, $x=dl^2$ et $y=dr^2$.

Alors,

$$\sqrt{n}=\sqrt{x}+\sqrt{y}=l\sqrt{d}+r\sqrt{d}=\sqrt{d(l+r)^2}\ .$$

En fixant $m=l+r$, on obtient $m\geq 1+1=2$ et $m^2|n$.

8. Semaine 8

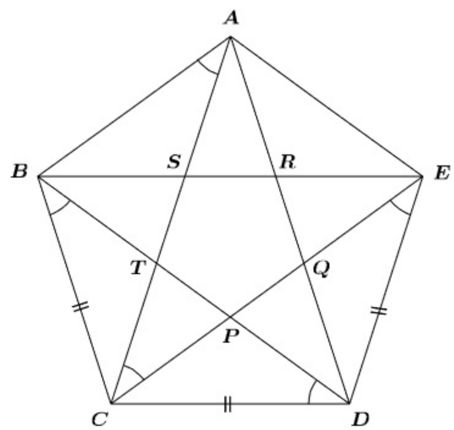
Problème Soit $ABCDE$ un pentagone convexe tel que $BC = CD = DE$ et

que chaque diagonale du pentagone est parallèle à l'un de ses côtés. Prouvez que tous les angles du pentagone sont égaux et que tous les côtés sont égaux.

Solution :

Problème 1 de l'Olympiade Mathématique d'Australie 1996, paru dans Crux Mathematicorum [1999:74]. Nous présentons, sous une forme légèrement modifiée, la solution de Toshio Seimiya qui est apparue dans [2000:458-459].

Désignons les intersections de la diagonale par P, Q, R, S, T, tel qu'illustré.



Comme $BE \parallel CD$ et $AC \parallel DE$, le quadrilatère $SCDE$ est un parallélogramme, et donc $SC = DE = CB$. Par conséquent, le quadrilatère $SCDE$ est un parallélogramme.

$$\angle CBE = \angle CBS = \angle CSB = \angle DEB\ .$$

Ensuite, comme $\angle CBE = \angle DEB, CB = DE$ et $CD \parallel DE$ il s'ensuit que $CDEB$ est un trapèze isocèle. Il s'ensuit que $\angle CBD = \angle CED$, et que $BCDE$ sont sur le même cercle.

En utilisant le fait que $AB \parallel CE$, $AC \parallel DE$ et $BC = CD$ on obtient

$$\angle BAC = \angle ACE = \angle CED = \angle CBD = \angle BDC\ . \tag{4}$$

Ceci implique que $ABCD$ sont sur le même cercle. Puisque ABC détermine un cercle unique, il s'ensuit que D, E doivent être sur ce cercle. Par conséquent, $ABCDE$ sont sur le même cercle.

Maintenant, puisque $ABCD$ sont sur le même cercle, on a $\angle ABC + \angle ADC = 180°$. Comme $AB \parallel CD$ on a aussi $\angle ABC + \angle BAD = 180°$. Par conséquent, $ABCD$ est un trapèze isocèle et donc $AB = CD$.

Exactement le même argument montre que $AEDC$ est un trapèze isocèle et donc $AE = CD$. Il s'ensuit que

$$AB = BC = CD = DE = EA\ .$$

Ensuite, par (4) on a

$$\angle BAC = \angle ACE = \angle CED = \angle CBD = \angle BDC$$

Appelons la valeur de cet angle α.

Comme CDE et ABC sont des triangles isocèles, on a également

$$\angle ACB = \angle DCE = \alpha \ .$$

En utilisant le fait que $BE \parallel CD$ on obtient également

$$\angle EBD = \angle BDC = \alpha$$

$$\angle BEC \angle ECD = \alpha$$

Ensuite, ABE isocèle et $AB \parallel CD$ donnent

$$\angle AEB = \angle ABE = \angle BEC = \alpha \ .$$

$BC \parallel AD, AE \parallel BD$ et EAD isocèle donne

$$\angle EDA = \angle EAD = \angle ABD = \angle DBC = \alpha \ .$$

Ensuite, $AC \parallel DE$ donne

$$\angle CAD = \angle ADE = \alpha \ .$$

Il s'ensuit que les cinq angles du pentagone sont égaux à 3α.

Note de la rédaction : Comme dans la solution originale, une fois que l'on sait que $ABCDE$ est inscrit dans un cercle, et que $AB = BC = CD = DE = EA$, on peut utiliser la propriété suivante du cercle pour déduire que tous les angles sont égaux :

Propriété : Supposons que A, B, C et D sont sur un cercle. Si $AB = CD$ alors, les arcs correspondants $\overset{\frown}{AB}$ et $\overset{\frown}{CD}$ sont égaux.