Le Concours mathématique du mésangeai du Canada 2024

Solutions Définitives

Un concours de la Société mathématique du Canada.

Partie A: 4 points chacune

A1. Bob demande à son ami Mike de taper tous les nombres compris entre 1 et 100, inclusivement, avec une virgule (“,”) entre chaque paire de nombres consécutifs. Pour taper les nombres de 1 à 11, Mike appuie sur 23 touches pour obtenir :

1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11

Combien de pressions de touches Mike devra-t-il faire afin d'accomplir la tâche confiée à lui par Bob ?

(A) 192 **(B)** 201 **(C)** 287 **(D)** 291

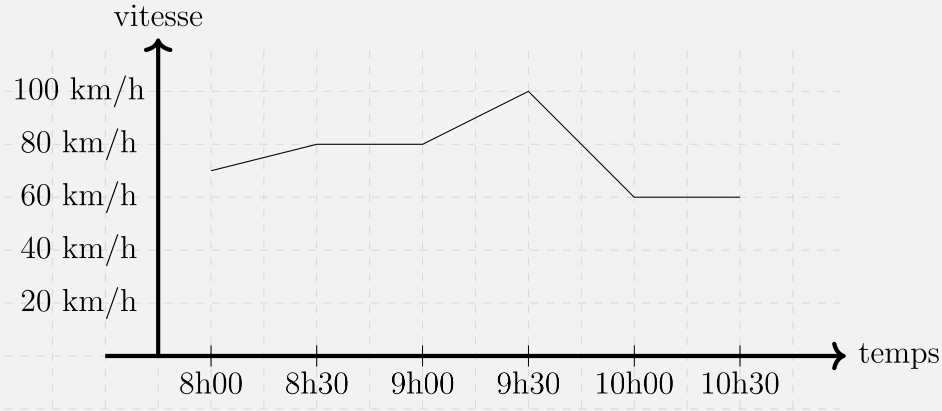
Solution : Mike doit appuyer 9 fois sur 1 touche (1-9), 90 fois sur 2 touches (10-99), 1 fois sur 3 touches (100) et 99 fois sur la virgule. Il doit donc appuyer sur

$$9 + 180 + 3 + 99 = 291$$

touches. $\square$

Réponse: $\boxed{\text{D}}$

A2. Reem est partie en voyage. Le graphe ci-dessous montre les vitesses auxquelles Reem a conduit pendant son voyage. Quel pourcentage du temps Reem a-t-elle conduit à 80 km/h ou plus ?



(A) 30 % **(B)** 40 % **(C)** 50 % **(D)** 75 %

Solution : Reem a voyagé 75 minutes sur 150 minutes à une vitesse de 80 km/h ou plus. □

Réponse: $\boxed{\textbf{C}}$

A3. Dana a 100 blocs de construction. Certains sont petits et d'autres grands. Elle peut combiner 3 petits blocs pour en faire un grand. Après avoir combiné tous ses petits blocs, elle a maintenant 40 grands blocs.

Combien de grands blocs avait-elle au départ ?

(A) 10 **(B)** 15 **(C)** 20 **(D)** 40

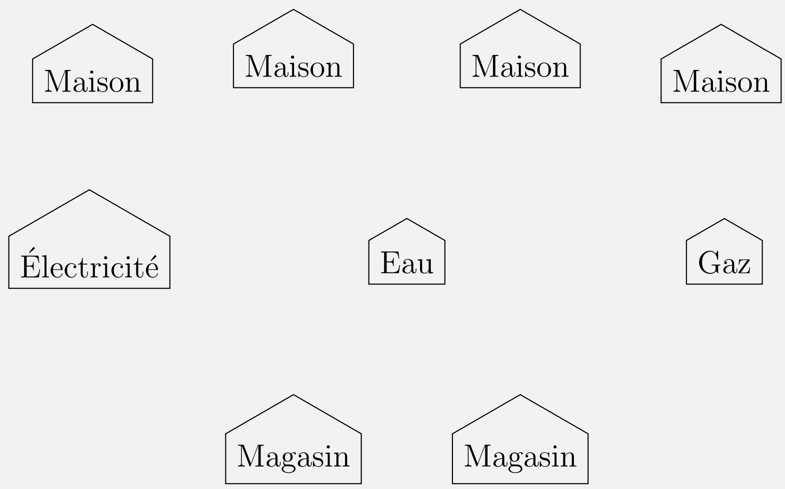
Solution : Chaque fois qu'elle combine des pièces, le nombre de pièces diminue de 2. Comme le nombre de pièces a diminué de 60, Dana a combiné des pièces 30 fois. Cela signifie qu'elle a combiné 90 petits morceaux en 30 grands morceaux.

Dana a donc commencé avec 10 gros morceaux.

□

Réponse: $\boxed{\textbf{A}}$

A4. Dans une petite ville, il y a deux magasins, trois companies de services publics (gaz, électricité et eau) et quatre maisons. Une carte de la ville est illustrée ci-dessous.



Chaque maison et chaque magasin doivent être connectés par un tuyau à chaque service public. Combien de tuyaux sont nécessaires au total ?

(A) 18 **(B)** 20 **(C)** 26 **(D)** 36

Solution : Chacune des trois sociétés de services publics doit être raccordée à 4 maisons et 2 magasins, et a donc besoin de 6 tuyaux. Au total, 18 tuyaux sont nécessaires. □

Réponse: $\boxed{\text{A}}$

A5. Ensemble, Ana, Brenda et Carla ont 67 bonbons. Tante Marie donne d'autres bonbons à chacune d'elles. Si elles ont toutes reçu la même quantité de bonbons de la part de Tante Marie et que maintenant Ana a 27 bonbons, Brenda a 39 bonbons et Carla a 31 bonbons, combien de bonbons Tante Marie a-t-elle donné à chacune d'elles ?

(A) 8 **(B)** 10 **(C)** 15 **(D)** 30

Solution : Après avoir reçu les bonbons, les enfants ont

$$27 + 39 + 31 = 97$$

bonbons. Ils ont donc reçu 30 bonbons au total. Chaque enfant a reçu 10 bonbons. □

Réponse: $\boxed{\text{B}}$

Partie B: 5 points chacune

B1. La factoreille d'un entier positif n, noté par le symbole $n!$, est le produit de tous les nombres entiers compris entre 1 et n, inclusivement. Par exemple, 3! (prononcé "3 factorielle") est

$$3! = 3 \times 2 \times 1$$

alors que

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \ .$$

Quel est le dernier chiffre de

$$1! + 2! + 3! + 4! + 5! + \ldots + 2024! \qquad ?$$

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** 4

Solution : On remarque qu'à partir de 5!, chaque factorielle contiendra $\times 2$ et $\times 5$ et se terminera donc par 0.

Comme

$$1! + 2! + 3! + 4! = 1 + 2 + 6 + 24 = 33$$

se termine par 3, le dernier chiffre de notre somme est 3. $\square$

Réponse: $\boxed{\text{D}}$

B2. À l'école Mésangeai du Canada, deux tiers des élèves font partie du club de mathématiques et deux cinquièmes font partie du club de physique.
S'il y a 105 élèves dans l'école, quel est le plus petit nombre d'élèves qui doivent appartenir aux deux clubs ?

(A) 0 **(B)** 5 **(C)** 7 **(D)** 42 **(E)** 105

Solution : Il y a 70 étudiants dans le club de mathématiques et 42 dans le club de physique. Puisque $70 + 42 = 112$ et qu'il y a 105 d'élèves dans l'école, au moins 7 élèves doivent être dans les deux clubs.

7 est possible si les 70 premiers élèves sont dans le club de maths et les 42 derniers dans le club de physique.

$\square$

Réponse: $\boxed{\text{C}}$

B3. Un nombre premier est un nombre entier, supérieur à 1, qui n'est divisible que par 1 et par lui-même.

Exemple : 2 et 3 sont premiers, mais 4 et 6 ne le sont pas (4 est divisible par 2, et 6 est divisible par 2 et 3).

Les faces de deux dés à six faces sont étiquetées avec les six premiers nombres premiers. Si les deux dés sont lancés, quelle est la probabilité que la somme des deux faces soit paire ?

(A) $\frac{1}{4}$ **(B)** $\frac{5}{18}$ **(C)** $\frac{1}{2}$ **(D)** $\frac{13}{18}$ **(E)** $\frac{3}{4}$

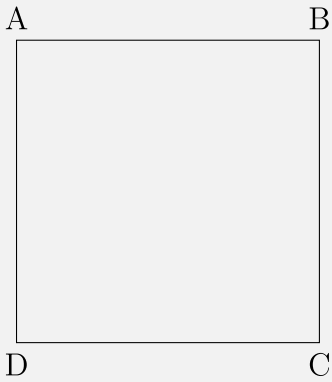
Solution : Les 6 premiers nombres premiers sont $2, 3, 5, 7, 11, 13$. Il y a $\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6}$ chances que les deux faces soient impaires et $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$ chances que les deux faces soient paires. La probabilité est donc de

$$\frac{26}{36} = \frac{13}{18}.$$

$\square$

Réponse: $\boxed{\textbf{D}}$

B4. Deux coureuses, Joy et Hope, courent autour d'un carré (ABCD) ayant une longueur de côté de 200 mètres.



Les deux commencent à courir à 9 h 00. Joy part du point A et court autour du carré à une vitesse de 75m/min dans le sens contraire des aiguilles d'une montre ($A \to D, D \to C, C \to B$ et $B \to A$). Hope part du point B et court autour du carré à une vitesse de 125m/min dans le sens des aiguilles d'une montre ($B \to C, C \to D, D \to A$ et $A \to B$). À quel moment se rencontrent-elles pour la deuxième fois ?

(A) 9:06 **(B)** 9:07 **(C)** 9:08 **(D)** 9:09 **(E)** 9:10

Solution : Notons que la première fois qu'ils se rencontrent, ils ont parcouru ensemble la distance $A - D - C - B$, soit 600 m.

Entre la première et la deuxième rencontre, ils doivent courir ensemble un autre tour complet. Par conséquent, jusqu'à la deuxième rencontre, ils ont couru ensemble

$$600 + 800 = 1400 \text{ m} \ .$$

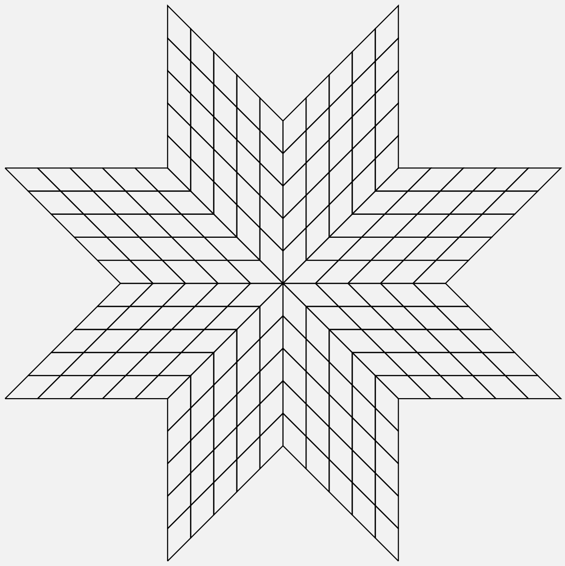
Si t est le temps, en minutes, entre 9 : 00 et leur deuxième rencontre, on a

$$75t + 125t = 1400 \Longrightarrow t = \frac{1400}{200} = 7 \text{ min} \ .$$

□

Réponse: $\boxed{\textbf{B}}$

$\boxed{\textbf{B5.}}$ Grand-mère coud un motif traditionnel autochtone, typiquement trouvé sur des couvertures et ailleurs, appelé un motif *couverture étoilée* sur une tapisserie. Le motif est composé de 200 losanges.



Pour chaque bord, qu'il soit à l'extérieur de l'étoile ou entre deux losanges, Grand-mère utilise exactement 10 cm de fil. Quelle quantité de fil a-t-elle utilisée au total ?

(A) 34 m **(B)** 40 m **(C)** 44 m **(D)** 48 m **(E)** 80 m

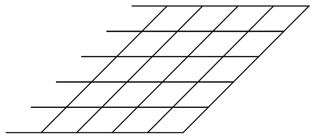
Solution : Au total, les 200 losanges ont 800 arêtes.

L'extérieur de l'étoile a 16 côtés, chacun composé de 5 arêtes. Il y a donc 80 arêtes sur la face extérieure. Pour ces arêtes, grand-mère a utilisé 800 cm de fil, soit 8m.

Chacune des 720 arêtes restantes est commune à deux losanges. Par conséquent, grand-mère ne coud que 360 arêtes de 10 cm, soit 36 m sur les arêtes intérieures.

Au total, elle a utilisé 44 m de fil.

Second solution: La couverture étoilée peut être fabriquée en cousant huit copies de la forme suivante, et en tournant dans le sens inverse des aiguilles d'une montre de 45° lorsque l'on passe d'une forme à l'autre.



Cette forme a six fils horizontaux et cinq fils verticaux, chacun d'exactement un demi-mètre. La longueur du fil est donc de

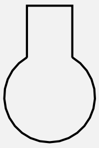
$$8 \times .5 \times 11 = 4 \times 11 = 44\text{m} .$$

$\square$

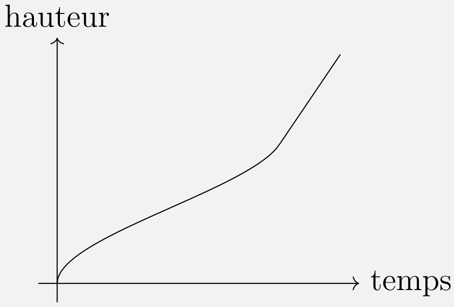
Réponse: $\boxed{\textbf{C}}$

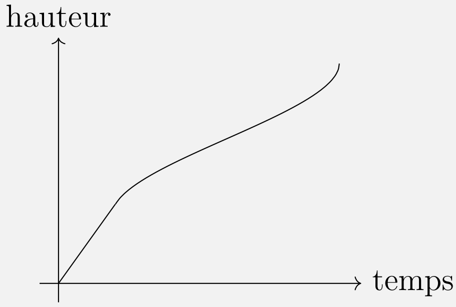
Partie C: 5 points chacune

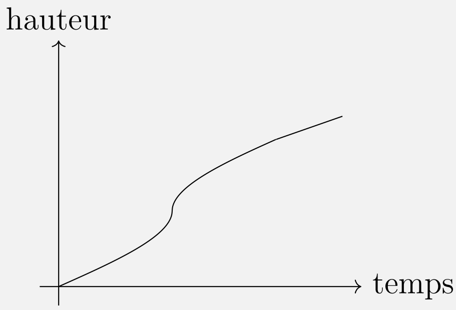
C1. Les chimistes utilisent des flacons à fond rond dans leurs laboratoires comme celui illustré ci-dessous.

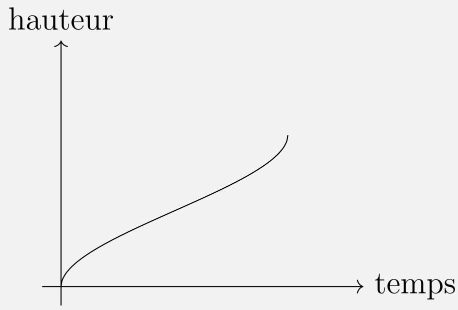


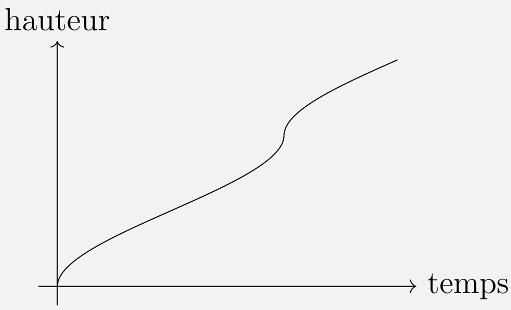
Si l'eau s'écoule dans le flacon à un taux constant et qu'un chimiste effectue des mesures continues de la hauteur de l'eau dans le flacon au fil du temps, lequel des graphes suivants illustre les mesures prises par le chimiste ?

A.


B.


C.


D.


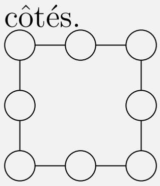
E.


Solution : La hauteur augmente rapidement au début, car la bouteille est très étroite au fond. Ensuite, elle montera de plus en plus lentement jusqu'à ce que le niveau de l'eau atteigne la partie la plus large de la bouteille.

Après ce point, la hauteur commencera à augmenter de plus en plus vite, jusqu'à ce qu'elle atteigne la section cylindrique, où elle augmentera à un taux constant, donnant un segment de ligne droite. Le seul graphique correspondant à cette description est A. $\square$

Réponse: $\boxed{\textbf{A}}$

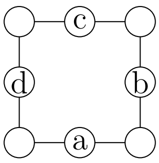
$\boxed{\textbf{C2.}}$ Les nombres $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ peuvent être placés dans les cercles ci-dessous de sorte que chaque nombre n'est utilisé qu'une seule fois et que la somme des trois nombres dans les cercles sur chacun des côtés du carré est la même pour tous les côtés.



Quelle est la plus grande somme possible pour les trois nombres sur chaque côté ?

(A) 12 **(B)** 13 **(C)** 14 **(D)** 15 **(E)** 16

Solution : On note a, b, c et d les cercles suivants et s la somme commune.



Les côtés gauche et droit contiennent tous les nombres sauf a et c. Par conséquent

$$2s + a + c = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$$

Le haut et les deux côtés contiennent tous les nombres sauf b et d. Par conséquent

$$2s + b + d = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$$

Cela montre que

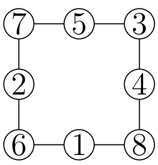
$$a + c = b + d = 36 - 2s\,.$$

Pour que s soit le plus grand possible, $a+c = b+d$ doit être le plus petit possible. Notons que $a + c = b + d = 36 - 2s$ sont tous deux des nombres pairs, donc $a + b + c + d$ doit être un multiple de 4. D'autre part $a + b + c + d \geq 1 + 2 + 3 + 4 = 10$ et donc $a + b + c + d$ doit être au moins 12.

Si $a + b + c + d = 12$ alors $a + c = b + d = 6$ dans ce cas

$$6 = 36 - 2s \Longrightarrow s = 15$$

La plus grande valeur est donc 15. Cette valeur est effectivement réalisable, comme le montre le tableau ci-dessous :



$\square$

Réponse: $\boxed{\textbf{D}}$

$\boxed{\textbf{C3.}}$ Un magasin vend des bouteilles de jus. Les bouteilles sont emballées dans des boîtes de 4, 9 ou 15 bouteilles par boîte et le magasin ne vend que des boîtes complètes. Sarah organise une fête et a besoin d'exactement 50 bouteilles (car elle ne veut pas de restes). Quel est le plus petit nombre de boîtes que Sarah doit acheter pour avoir exactement 50 bouteilles ?

(A) 4 **(B)** 5 **(C)** 6 **(D)** 7 **(E)** 10

Solution : Notons tout d'abord que l'achat de 4 boîtes ou plus de 15 bouteilles dépasse 50 bouteilles. Cela signifie que Sarah doit acheter 0,1,2 ou 3 boîtes de 15 bouteilles.

Cas 1: Elle achète 3 boîtes de 15 bouteilles. Elle doit alors acheter 5 bouteilles supplémentaires, ce qui n'est pas possible.

Cas 2: Elle achète 2 boîtes de 15 bouteilles. Elle doit donc acheter 20 bouteilles supplémentaires. Elle peut acheter au maximum 2 boîtes de 9 bouteilles, et en vérifiant les cas où elle achète 0, 1, 2 boîtes de 9 bouteilles, on voit que 0 boîte de 9 bouteilles et 5 boîtes de 4 bouteilles est la seule possibilité.

Dans ce cas, elle achète $2 + 0 + 5 = 7$ boîtes.

Cas 3: Elle achète 1 boîte de 15 bouteilles. Elle doit donc acheter 35 bouteilles supplémentaires. Il s'ensuit qu'elle peut acheter au maximum 3 boîtes de 9 bouteilles. De plus, comme elle a besoin d'un nombre impair de bouteilles, le nombre de boîtes de 9 bouteilles doit être impair, donc 1 ou 3.

La seule possibilité est d'acheter 3 boîtes de 9 bouteilles et de 2 boîtes de 4 bouteilles.

Dans ce cas, elle achète $1 + 3 + 2 = 6$ boîtes.

Cas 4: Elle achète 0 boîte de 15 bouteilles. Comme chaque boîte contient au maximum 9 bouteilles et qu'elle doit acheter 50 bouteilles, elle a besoin de 6 boîtes ou plus.

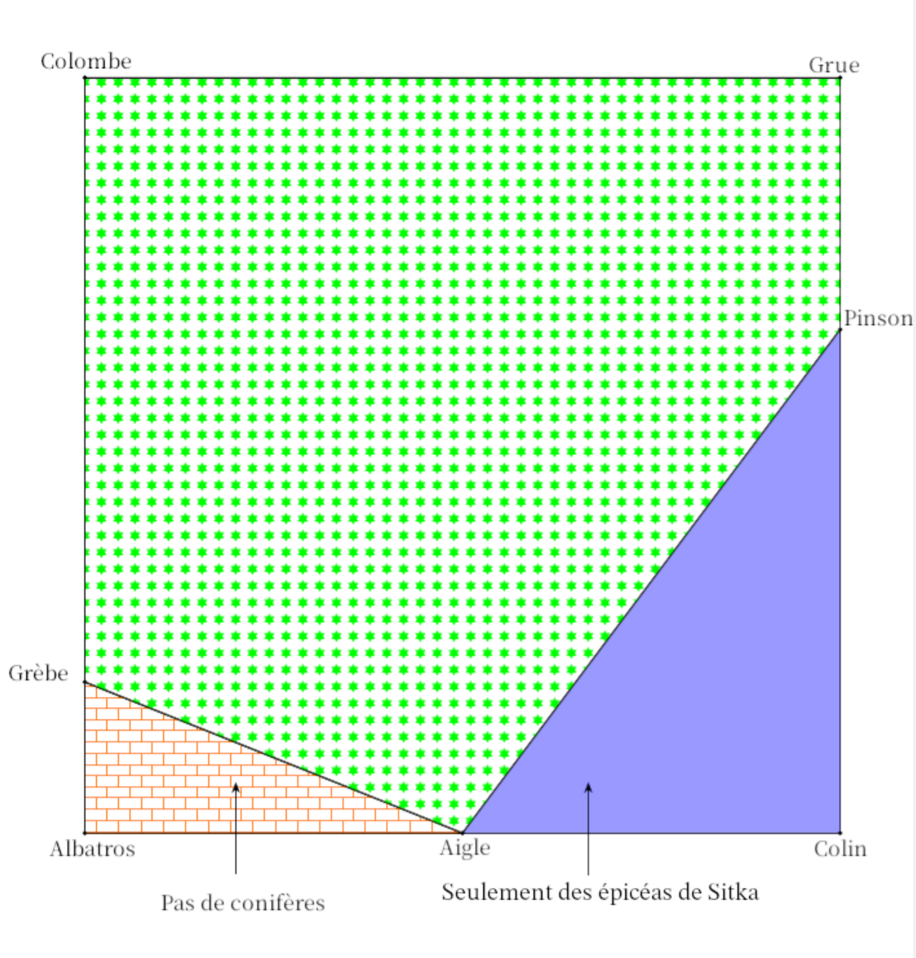
Quoi qu'il en soit, le plus petit nombre de boîtes est 6.

□

Réponse: $\boxed{\textbf{C}}$

C4. Des campeurs arrivent au parc Algonquin pour y trouver une forêt parfaitement carrée d'une superficie de 6000 km^2 dont la carte est donnée ci-dessous. Ils sont à la recherche d'un mésangeai du Canada.
Ils savent qu'on ne retrouve pas le mésangeai du Canada là où il n'y a pas de conifères (marqué par des briques orange sur la carte) ou là où il y a seulement l'épicéa de Sitka (marqué en bleu foncé sur la carte).
Deux campeuses, Ali et Bria, décident de cartographier les zones où le mésangeai du Canada est introuvable. Elles marchent d'un pas régulier, mesurant leur temps entre les points d'intérêt.
À leur retour, elles font les commentaires suivants :

- La marche d'Albatros à Aigle prend autant de temps que la marche d'Aigle au Colin.
- Le trajet de Colombe au Grèbe est 4 fois plus long que celui du Grèbe à Albatros.
- La marche de Colin à Pinson prend deux fois plus de temps que la marche de Pinson à Grue.



Quelle est la superficie de la zone (marquée par des étoiles vertes) où un mésangeai du Canada pourrait être observé ?

(A) 3400 **(B)** 4700 **(C)** 5000 **(D)** 5700 **(E)** 6000

Solution : Soit x le côté du carré. On a $x^2 = 6000$.

La distance de A à G est $\frac{x}{5}$, de A à E et de E à B sont $\frac{x}{2}$ et de B à F est $\frac{2x}{3}$.

Par conséquent,

$$\text{zone de briques oranges} = \frac{x^2}{20} = 300$$
$$\text{zone bleue unie} = \frac{x^2}{6} = 1000\,.$$

Par conséquent, les mésangeais du Canada peuvent être observés dans $6000-300-1000 = 4700\text{km}^2$. □

Réponse: $\boxed{\textbf{B}}$

$\boxed{\textbf{C5.}}$ Un nombre à 6 chiffres est dit “excitant” s'il satisfait à chacune des propriétés suivantes.

- Chacun des chiffres 4,5,6,7,8 et 9 apparaît exactement une fois ;
- Le nombre formé par les n premiers chiffres est divisible par n, pour chaque $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Par exemple, 987654 est excitant car 9 est divisible par 1, 98 est divisible par 2, 987 est divisible par 3, 9876 est divisible par 4, 98 765 est divisible par 5 et 98 7654 est divisible par 6.

Sans compter 987654, combien existe-t-il de nombre excitants ?

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** 4

Solution : Notons que les deuxième, quatrième et sixième chiffres doivent être pairs. Ils doivent donc être $8, 6$ et 4 dans un certain ordre.

Le cinquième chiffre doit être 5. Il s'ensuit que le premier et le troisième chiffre sont 9 et 7, dans un certain ordre.

La somme des trois premiers chiffres doit être divisible par 3, et donc $16 +$ second chiffre doit être divisible par 3. Puisque le deuxième chiffre est $8, 6$ ou 4, il doit s'agir de 8.

On a donc conclu que les premier et troisième chiffres sont 9 et 7, dans un certain ordre, et que le deuxième chiffre doit être 8.

On divise maintenant le problème en deux cas :

<u>Cas 1:</u> Le nombre commence par 987. Nous savons que le quatrième chiffre doit être 6 ou 4, donc les quatre premiers chiffres sont soit 9876 soit 9874. Puisque ce nombre doit être divisible par 4, le quatrième chiffre doit être 6. Comme le cinquième chiffre est 5, on conclut que dans le cas 1 on a seulement le nombre amusant déjà mentionné, à savoir 987654.

Cas 2: Le nombre commence par 789. On sait déjà que le quatrième chiffre doit être 6 ou 4, donc les quatre premiers chiffres sont soit 7896 soit 7894. Puisque ce nombre doit être divisible par 4, le quatrième chiffre doit être 6. Comme le cinquième chiffre est 5, on conclut que dans le cas 2 on a seulement qu'un seul nombre amusant, à savoir 789654.

La réponse est donc qu'il y a un nombre amusant de plus. □

Réponse: $\boxed{\textbf{B}}$