1. Semaine 1

Cette semaine, on commence par deux questions de niveau débutant pour s'échauffer.

Problème A

On lance quatre dés. Quelle est la probabilité que le produit des nombres obtenus soit égal à 36 ?

Solution :

Problème 1 des Olympiades néerlandaises de mathématiques 1992, deuxième tour, paru dans Crux Mathematicorum [1995 ; 192]. Nous présentons la solution d'Edward T. H. Wang parue dans [1997:13].

Il y a quatre façons d'obtenir un produit de 36 à partir de quatre nombres compris entre 1 et 6 :

$$\{1,1,6,6\};\{1,2,3,6\};\{2,2,3,3\} \text{ et } \{1,3,3,4\}.$$

$\{1,1,6,6\}$ et $\{2,2,3,3\}$ peut se produire de $\frac{4!}{2!\cdot 2!} = 6$ façons.

$\{1,2,3,6\}$ peut se produire de $4! = 24$ façons.

$\{1,3,3,4\}$ peut se produire de $\frac{4!}{2!} = 12$ façons.

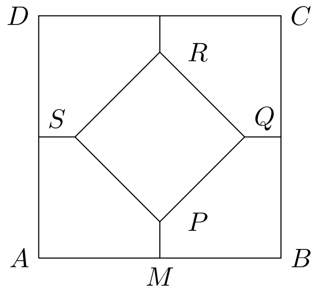
Par conséquent, la probabilité est de

$$\frac{6+6+24+12}{6^4} = \frac{1+1+4+2}{6^3} = \frac{8}{2^3\cdot 3^3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}.$$

Note de la rédaction : Afin de se convaincre qu'il s'agit là des seules possibilités, il faut d'abord noter que chaque dé doit être un diviseur de 36 et ne peut donc être que $1,2,3,4,6$. On peut ensuite diviser le comptage en trois cas : il y a 2, 1 ou aucun six. Les deux premiers cas sont immédiats, tandis que dans le troisième cas il est facile de voir qu'il doit y avoir deux 3, d'où l'on tire deux possibilités évidentes.

Problème B

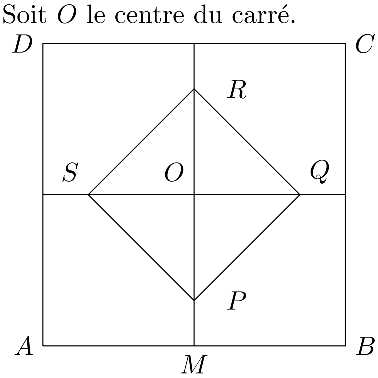
Une entreprise de linoléum fabrique actuellement un produit dont le motif est une répétition de la figure ci-dessous. $ABCD$ et $PQRS$ sont des carrés concentriques. Les diagonales de $PQRS$ sont parallèles aux côtés de $ABCD$. Si la longueur de AB est d'une unité et si la longueur de PQ est de $1/2$ unité, calculez la longueur de PM où M est est le milieu de AB.



Solution :

Problème 2 du *Saskatchewan Senior Mathematics Contest 1992*, paru dans Crux Mathematicorum [1995:261] . Nous présentons la solution officielle qui a été publiée dans [1995:296].

Soit O le centre du carré.



Donc

$$OM = \frac{1}{2}$$

$$OP = \frac{1}{2}RP = \frac{1}{2}\sqrt{RQ^2 + PQ^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{4} .$$

Ainsi

$$PM = OM - OP = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} .$$

Note de la rédaction : Avec la même image, si le côté de $ABCD$ est de a unités et le côté de $PQRS$ est de b unités, trouvez la longueur de PM sous forme de formule en a, b.

2. Semaine 2

Problème Supposons que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont les nombres $1, 2, \ldots, n$ écrits dans un certain ordre. Montrez que

$$(a_1 - 1)^2 + (a_2 - 2)^2 + \ldots + (a_n - n)^2$$

est toujours pair.

Solution :

Problème 4 de la section A des Olympiades sud-africaines de mathématiques, troisième tour, septembre 1995, paru dans Crux Mathematicorum [1999:391]. Nous présentons la solution de Pierre Bornsztein qui est parue dans [2001:433].

Notons que pour chaque j compris entre 1 et n on a

$$(a_j - j)^2 = a_j^2 - 2 \cdot a_j \cdot j + j^2 .$$

Donc

$$\begin{aligned}(a_1 - 1)^2 + (a_2 - 2)^2 + \ldots + (a_n - n)^2 &= \left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right) \\ &+ 2\,(1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 + \ldots + n \cdot a_n) + \left(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2\right) .\end{aligned}$$

Puisque $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont les nombres $1, 2, \ldots, n$ écrits dans un certain ordre, on a

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 .$$

Ainsi

$$\begin{aligned}(a_1 - 1)^2 + (a_2 - 2)^2 + \ldots + (a_n - n)^2 &= 2\,(1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 + \ldots + n \cdot a_n) \\ &+ 2\left(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2\right)\end{aligned}$$

est pair.

Note de la rédaction : De manière plus générale, on peut montrer que si $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sont des entiers et que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ est un réarrangement de $b_1, b_2, \ldots, b_n$, alors, pour tous les choix possibles de signes ci-dessous, les nombres

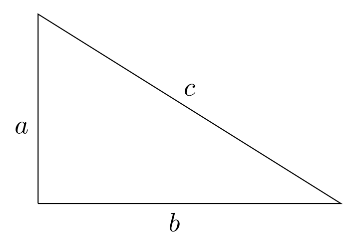
$$(a_1 \pm b_1)^2 + (a_2 \pm b_2)^2 + \ldots + (a_n \pm b_n)^2$$

sont pairs.

3. Semaine 3

Problème Soient $a < b < c$ les côtés d'un triangle rectangle. Soit $2p = a+b+c$ son périmètre et S son aire. Montrez que

$$p(p-c) = (p-a)(p-b) = S$$



Solution :

Problème 20 du concours *Baltic Way–92*, paru dans Crux Mathematicorum [1996:159]. Nous présentons, sous une forme légèrement modifiée, la solution de nombreux participants qui est parue dans [1997:462].

Puisque le triangle est un triangle rectangle, on a

$$2S = ab$$
$$c^2 = a^2 + b^2$$

Alors

$$\begin{aligned} p(p-c) &= \frac{1}{4}(a+b+c)(a+b-c) = \frac{1}{4}\left((a+b)^2 - c^2\right) \\ &= \frac{1}{4}(a^2+b^2+2ab-c^2) = \frac{ab}{2} = S\,. \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} (p-a)(p-b) &= p^2 - (a+b)p + ab = p^2 - (2p-c)p + 2S \\ &= p^2 - 2p^2 + pc + 2S = 2S - p(p-c) = S\,. \end{aligned}$$

Cela achève la démonstration de l'affirmation.

Note de la rédaction 1 : Dans un triangle quelconque, on dispose de la formule de Héron que voici :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\,.$$

Voyez si vous pouvez démontrer cela.

Note de la rédaction 2 : Voyez si vous pouvez également résoudre le problème plus général suivant :

Problème : Soit ABC un triangle dont les côtés sont $BC = a$, $AC = b$ et $AB = c$. Si, de plus, on a $2p = a+b+c$, alors les énoncés suivants sont équivalents :

(i) $p(p-c) = (p-a)(p-b)$.

(ii) $p(p-c) = S$.
(iii) $(p-a)(p-b) = S$.
(iv) $p(p-c) = \frac{ab}{2}$.
(v) $(p-a)(p-b) = \frac{ab}{2}$.
(vi) $a^2 + b^2 = c^2$.
(vi) $\angle C = 90^\circ$.

4. Semaine 4

Problème Soient d et d' deux diviseurs de n tels que $d' > d$. Montrez que

$$d' > d + \frac{d^2}{n}\,.$$

Solution :

Problème 1 des Olympiades nationales de Russie 2011: niveau 11, paru dans Crux Mathematicorum [2011:496]. [2011:496]. Nous présentons la solution de Kim Uyen Truong qui est parue dans [2013:18].

Puisque d et d' sont des diviseurs de n, il existe des entiers k et m tels que

$$n = kd = md'\,.$$

Comme $d < d'$, on a $k > m$ d'où l'on tire que $k \geq m + 1$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
&d' > d + \frac{d^2}{n} \iff \\
&\frac{n}{m} > \frac{n}{k} + \frac{n}{k^2} \iff \\
&\frac{1}{m} > \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} \iff \\
&k^2 > km + m\,.
\end{aligned}$$

Mais cette dernière inégalité est vraie puisque

$$km + m \leq k(k-1) + k - 1 = k^2 - 1 < k^2\,.$$

Ainsi

$$d' > d + \frac{d^2}{n}\,,$$

tel qu'affirmé.

5. Semaine 5

Problème Soient a, b et c des entiers positifs tels que

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < 1\,.$$

Montrez que

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{41}{42}\,.$$

Solution :

Problème 3 de l'épreuve finale du concours de mathématiques en Finlande, 2000-01, paru dans Crux Mathematicorum [2004:245]. Nous présentons la solution d'Edward T.H. Wang qui est parue dans [2006:162].

Soit $S = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

En raison de la symétrie complète, nous pouvons supposer sans perte de généralité que $a \leq b \leq c$. On a clairement $a \geq 2$. On divise ensuite le problème en trois cas distincts.

Cas 1: $a \geq 4$. Alors $b, c \geq 4$ d'où l'on tire que

$$S \leq \frac{3}{4} < \frac{41}{42}\,.$$

Cela achève la démonstration de l'affirmation dans ce cas.

Cas 2: $a = 3$. Si $c = 3$ alors $b = 3$ d'où l'on tire que $S = 1$, ce qui constitue une contradiction. Par conséquent, on doit avoir $b \geq 3$ et $c \geq 4$, ce qui donne

$$S \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{11}{12} < \frac{41}{42}\,.$$

Cela achève la démonstration de l'affirmation dans ce cas.

Cas 3: $a = 2$. Alors,

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{1}{2}\,.$$

Il en découle immédiatement que $b \geq 3$.

Sous-cas 3a: $b \geq 5$. Alors, $c \geq 5$ d'où l'on tire que

$$S \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{9}{10} < \frac{41}{42}\,.$$

Cela achève la démonstration de l'affirmation dans ce sous-cas.

Sous-cas 3b: $b = 4$. On ne peut avoir $c = 4$ d'où l'on tire que $c \geq 5$. Il s'ensuit que

$$S \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{19}{20} < \frac{41}{42}\,.$$

Cela achève la démonstration de l'affirmation dans ce sous-cas.

Sous-cas 3c: $b = 3$. Alors

$$\frac{1}{c} < \frac{1}{6}$$

d'où l'on tire que$c \geq 7$. Ainsi,

$$S \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} = \frac{41}{42}\,,$$

Cela achève la démonstration de l'affirmation dans ce sous-cas.

6. Semaine 6

Problème

Trouvez tous les entiers positifs n pour lesquels $7^n - 1$ est un multiple de $6^n - 1$.

Solution :

Problème 1 de l'Olympiade mathématique de Tchécoslovaquie 1993, paru dans Crux Mathematicorum [1996:109]. Nous présentons, sous une forme légèrement modifiée, la solution de Mansur Boase et Edward T.H. Wang, parue dans [1997:395].

On montrera qu'un tel n n'existe pas.

Supposons, en vue d'obtenir une contradiction, qu'il existe un certain n tel que $6^n - 1$ divise $7^n - 1$. Alors, puisque

$$6^n - 1 = (6-1)(6^{n-1} + 6^{n-2} + \ldots + 1)$$

on obtient que $7^n - 1$ est un multiple de 5.

Un simple calcul montre que

$$7^4 - 1 = (7^2 - 1)(7^2 + 1) = 50 \cdot (7^2 - 1)\,.$$

Par conséquent, $7^4 - 1$ est un multiple de 5

En vertu du théorème du reste,

$$n = 4q + r$$

pour certains entiers non négatifs q et r avec $0 \leq r \leq 3$. Dans ce cas

$$\begin{aligned}
\underbrace{7^{4q+r} - 1}_{\text{multiple de } 5} &= 7^{4q+r} - 7^r + 7^r - 1 = 7^r \left(7^{4q} - 1\right) + 7^r - 1 \\
&= 7^r \left((7^4)^q - 1^q\right) + 7^r - 1 \\
&= 7^r \underbrace{(7^4 - 1)}_{\text{multiple de } 5} \left(7^{4(q-1)} + 7^{4(q-2)} + \ldots + 7^4 + 1\right) + 7^r - 1
\end{aligned}$$

d'où il découle que $7^r - 1$ est un multiple de 5. En vérifiant les quatre possibilités $r \in \{0, 1, 2, 3\}$ nous voyons que seul $r = 0$ fonctionne.

Il s'ensuit que

$$r = 4q\,.$$

Mais on obtient ensuite que

$$6^n - 1 = 6^{4q} - 1 = (6^2)^{2q} - 1^{2q} = \underbrace{(6^2 - 1)}_{\text{multiple de } 7} (6^{2q(2q-1)} + 6^{2q(2q-2)} + \ldots + 6^2 + 1)$$

est un multiple de 7. Puisque $6^n - 1$ divise $7^n - 1$, il s'ensuit que $7^n - 1$ est un multiple de 7. Mais cela n'est pas possible pour un entier positif n.

Puisque nous avons obtenu une contradiction, notre hypothèse est fausse. Par conséquent, un tel entier n n'existe pas.

Note de la rédaction : La solution est beaucoup plus facile et rapide à écrire si on est familier avec l'arithmétique modulaire. En effet, l'argument est le suivant:

$$6^n - 1 \equiv 0 \pmod{5}$$

implique que

$$7^n - 1 \equiv 0 \pmod{5}.$$

En vérifiant les puissances de 7 modulo 5, on voit immédiatement que n est un multiple de 4 et qu'il est donc pair. On a alors

$$6^n - 1 \equiv (-1)^n - 1 = 0 \pmod{7}$$

ce qui implique que $7^n - 1$ est un multiple de 7. Il s'agit là d'une contradiction.

7. Semaine 7

Problème

Lequel de ces deux nombres est le plus grand,

$$\left(\sqrt[3]{2}-1\right)^{\frac{1}{3}} \qquad \text{ou} \qquad \sqrt[3]{\frac{1}{9}}-\sqrt[3]{\frac{2}{9}}+\sqrt[3]{\frac{4}{9}} \qquad ?$$

Solution :

Problème 1 de la liste *Quickies* 1996 paru dans Crux Mathematicorum [2001:78] . Nous présentons, sous une forme légèrement modifiée, la solution officielle parue dans [2001:78].

Une identité de Ramanujan stipule qu'ils sont égaux.

Posons $a=\sqrt[3]{\frac{1}{3}}, b=\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$. Alors,

$$\sqrt[3]{\frac{1}{9}}-\sqrt[3]{\frac{2}{9}}+\sqrt[3]{\frac{4}{9}}=a^2-ab+b^2=\frac{a^3+b^3}{a+b}=\frac{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}{a+b}=\frac{1}{a+b}\,.$$

Notons ensuite que

$$a+b=\sqrt[3]{\frac{1}{3}}(1+\sqrt[3]{2})\,.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\left(\sqrt[3]{2}-1\right)(a+b)^3&=\left(\sqrt[3]{2}-1\right)\left(1+\sqrt[3]{2}\right)^3\frac{1}{3}\\&=\frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{2}-1\right)\left(1+3\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{4}+2\right)\\&=\left(\sqrt[3]{2}-1\right)\left(1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)=(\sqrt[3]{2})^3-1^3=1\,.\end{aligned}$$

En extrayant les racines cubiques, on obtient

$$\left(\sqrt[3]{2}-1\right)^{\frac{1}{3}}(a+b)=1$$

d'où l'on tire que

$$\left(\sqrt[3]{2}-1\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{a+b}=\sqrt[3]{\frac{1}{9}}-\sqrt[3]{\frac{2}{9}}+\sqrt[3]{\frac{4}{9}}\,,$$

tel qu'affirmé.

8. Semaine 8

Cette semaine, nous nous pencherons sur une équation diophantienne.

Problème Trouvez tous les entiers x et y tels que

$$x^3 + x^2 + x = y^2 + y$$

Solution :

Problème 4 de l'épreuve de sélection de l'équipe de Croatie 2011, jour 2, paru dans Crux Mathematicorum [2012:54]. Nous présentons, sous une forme modifiée par l'éditeur, la solution d'Oliver Geupel parue dans [2013:169]

On affirme $x = 0$.

Supposons, en vue d'obtenir une contradiction, que $x \neq 0$.

Notons d'abord que $y^2 + y \geq 0$ et $x^2 + x + 1 > 0$. Par conséquent, comme

$$x(x^2 + x + 1) = y^2 + y \geq 0,$$

on obtient $x > 0$.

L'équation peut s'écrire comme suit :

$$x^3 = y^2 - x^2 + y - x = (y - x)(y + x) + y - x = (y - x)(y + x + 1)\,. \tag{1}$$

On soutient que $\mathrm{PGCD}(y-x, y+x+1) = 1$. En effet, si $\mathrm{PGCD}(y-x, y+x+1) \neq 1$, il existe un nombre premier p tel que $p|y - x$ et $p|y + x + 1$.

Alors

$$p|(y - x)(y + x + 1) = x^3$$

et il s'ensuit que, puisque p est premier, $p|x$. Mais, comme $p|y - x$, on a alors aussi $p|y$. Donc, $p|x$, $p|y$ et $p|x + y + 1$ ce qui donne $p|1$. Or, il s'agit là d'une contradiction.

Ainsi $\mathrm{PGCD}(y - x, y + x + 1) = 1$.

Il découle de (1) qu'il existe des entiers m et n tels que

$$y - x = n^3$$
$$y + x + 1 = m^3\,.$$

De plus, comme $x > 0$, on a $m^3 > n^3$ d'où l'on tire que $m > n$. Il s'ensuit que $m \geq n + 1$. En introduisant ceci dans (1), on obtient

$$x = mn\,.$$

Ainsi

$$y = n^3 + mn$$
$$y = m^3 - mn - 1$$

donc

$$(m - n)(m^2 + mn + n^2) = m^3 - n^3 = 2mn + 1\,.$$

Or, puisque $m > n$ on a $m - n \geq 1$. De même,

$$m^2 + n^2 \geq 2mn = 2x > 0\,.$$

Par conséquent,

$$2mn + 1 = (m-n)(m^2 + mn + n^2) \geq 1 \cdot 3mn = 3mn\,,$$

ce qui donne $mn = 1$. Comme m et n sont des entiers, cela implique que $m = n = \pm 1$, ce qui contredit le fait que $m > n$.

Puisqu'on obtenu une contradiction, l'hypothèse voulant que $x \neq 0$ est fausse. Par voie de conséquence, $x = 0$.

Le fait que $x = 0$ implique que l'équation originale donne

$$y^2 + y = 0$$

d'où l'on tire que $y = 0$ ou $y = -1$.

Il existe donc deux solutions

$$(x, y) = (0, 0) \qquad \text{et} \qquad (x, y) = (0, -1)\,.$$

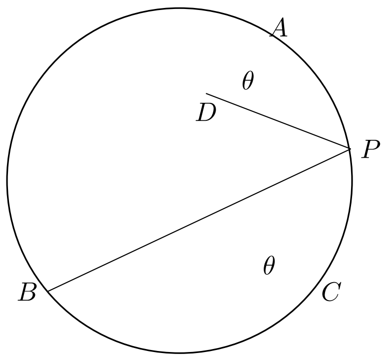
9. Semaine 9

Problème

Soit ABC un triangle et D un point du côté AB tel que $AB = 4AD$. P est un point du cercle passant par A, B et C tel que P et C sont du même côté de AB et

$$\angle ADP = \angle ACB \,.$$

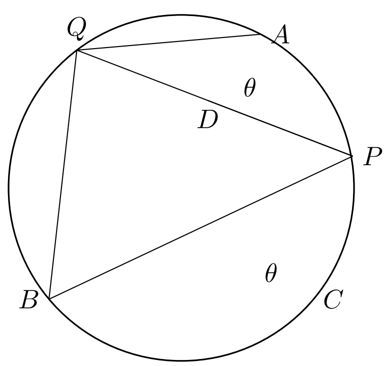
Montrez que $PB = 2PD$.



Solution :

Problème 2 de l'épreuve 2 des Olympiades britanniques de mathématiques 2002-03, légèrement reformulé, paru dans Crux Mathematicorum [2006:215]. Nous présentons la solution de Michel Bataille qui est apparue dans [2007:221]

Prolongeons PD pour qu'il rencontre le cercle en Q.



On a

$$\angle QAB = \frac{1}{2}\overset{\frown}{QB} = \angle QPB$$

En tâchant d'exploiter l'information dont au dispose au sujet des angles, on trouve que

$$\begin{aligned}\angle ADQ = \angle BDP = 180^\circ - \theta &= 180^\circ - \frac{1}{2}A\overset{\frown}{Q}B \\ &= \frac{1}{2}A\overset{\frown}{C}B = \angle AQB\,.\end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\angle ADQ = \angle AQB$$
$$\angle QAD = \angle BAQ$$

ce qui montre que les triangles ΔADQ et ΔAQB sont semblables. On a donc

$$\frac{AD}{AQ} = \frac{AQ}{AB}\,.$$

En utilisant le fait que $AB = 4AD$ on obtient

$$AB = 2AQ\,. \tag{2}$$

Ensuite, en vertu de ce qui précède, on a

$$\angle PDB = \angle AQB\,.$$

Comme

$$\angle DPB = \angle QAB\,.$$

on a que les triangles ΔPDB et ΔAQB sont également similaires. Par conséquent

$$\frac{DP}{AQ} = \frac{PB}{AB}\,.$$

En combinant cette relation avec (2), on obtient

$$PB = 2DP\,.$$

Cela achève la démonstration de l'énoncé.