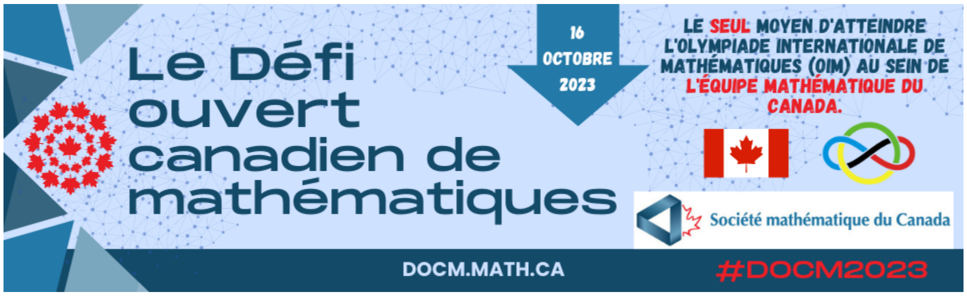
Défi ouvert canadien de mathématiques 2023

Solutions Officielles



Un concours de la Société mathématique du Canada.

Le DOCM comprend trois sections :

A. Des questions à réponse courte valant 4 points chacune. La totalité des points sera attribuée si la réponse est correcte. Une partie des points peut être attribuée si une réponse correcte n'est pas fournie mais que certains progrès vers une solution ont pu être réalisés.

B. Des questions à réponse courte valant 6 points chacune. La totalité des points sera attribuée si la réponse est correcte. Une partie des points peut être attribuée si une réponse correcte n'est pas fournie mais que certains progrès vers une solution ont pu être réalisés.

C. Des questions à solutions complètes en plusieurs parties valant 10 points chacune. Les solutions doivent être complètes et clairement présentées pour obtenir la totalité des points.

Section A

A1 Tyler a pris un nombre positif, l'a élevé au carré, l'a divisé par 3, l'a élevé au cube et l'a divisé par 9. Au terme de ces manipulations, il a obtenu le même nombre qu'au départ. Quel était ce nombre ?

Réponse : 3

Solution :
Supposons que Tyler ait commencé par le nombre x. Après l'avoir élevé au carré puis divisé par 3, il obtient le nombre $\frac{x^2}{3}$. Après avoir élevé au cube ce nombre puis divisé par 9, il obtiendra le nombre

$$\frac{\left(\frac{x^2}{3}\right)^3}{9} = \frac{\left(\frac{x^6}{3^3}\right)}{9} = \frac{x^6}{3^5}.$$

On obtient donc $x = \frac{x^6}{3^5}$. Après avoir divisé les deux côtés par x et multiplié les deux côtés par 3^5, on obtient $x^5 = 3^5$, d'où $x = 3$.

A2 Un point de coordonnées $(a, 2a)$ se trouve dans le 3ème quadrant ainsi que sur la courbe donnée par l'équation $3x^2 + y^2 = 28$. Trouvez a.

Réponse : -2

Solution :
On introduit le point $(x, y) = (a, 2a)$ dans l'équation de la courbe pour obtenir

$$3a^2 + (2a)^2 = 28,$$

et en développant puis en divisant les deux côtés de l'équation par 7, on obtient $a^2 = 4$. Ainsi $a = \pm 2$. Puisque le point se trouve dans le troisième quadrant, on doit choisir $a = -2$.

A3 Tanya et Katya ont fait une expérience et ont obtenu deux nombres réels positifs, chacun étant compris entre 4 et 100 inclusivement.
Tanya écrit ces deux nombres x et y. Elle calcule ensuite leur moyenne. Katya, elle, a écrit le deuxième nombre deux fois et elle calcule la moyenne des trois nombres x, y et y. Quelle est la différence maximale entre leur résultats respectifs ?

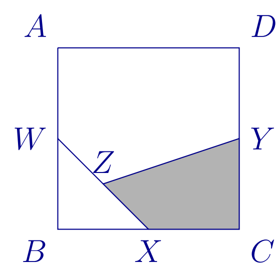
Réponse : 16

Solution :
Le calcul de Tanya est $\dfrac{x+y}{2}$ et celui de Katya est $\dfrac{x+2y}{3}$. On veut la différence positive de ces deux quantités; en prenant le dénominateur commun (à savoir 6), on obtient

$$\left|\frac{3x+3y-2x-4y}{6}\right| = \left|\frac{x-y}{6}\right|.$$

Puisque x et y sont compris entre 4 et 100 inclusivement, la différence maximale est de $100-4=96$; dans ce cas, la différence entre le calcul de Tanya et celui de Katya est de $\frac{96}{6}=16$.

A4 La mesure des côtés du carré ABCD est de 10 cm. Les points W, X, Y et Z sont les milieux des segments AB, BC, CD et WX, respectivement. Déterminez l'aire du quadrilatère $XCYZ$ (en cm^2).



Réponse : 25

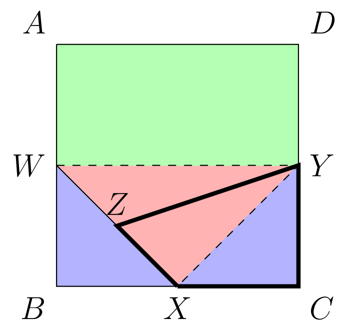
Solution 1 :
On décompose le quadrilatère $XCYZ$ en deux triangles : le triangle YZX et le triangle YXC. Comme Z est au milieu de la droite WX, les aires des triangles YZX et YZW sont égales ; elles sont toutes les deux la moitié de l'aire du triangle WYX, qui est un triangle isocèle droit avec des bases de longueur $5\sqrt{2}$ cm. Ainsi, l'aire du triangle YZX est

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}(5\sqrt{2})^2=\frac{25}{2}\text{ cm}^2.$$

L'aire du triangle YXC est également $\frac{25}{2}$ cm^2, puisqu'il s'agit d'un triangle isocèle droit dont les bases mesurent 5 cm. Ainsi, l'aire totale du quadrilatère $YZXC$ est 25 cm^2.

Solution 2 :
Comme Z est le milieu de WX, les aires des triangles ayant des bases et des hauteurs égales sont égales : $[YWZ] = [YXZ]$. Il est clair que $\Delta WBX \cong \Delta YCX$, donc $[WBX] = [YCX]$. D'où

$$[XCYZ] = \frac{1}{2}[WBCY] = \frac{1}{4}[ABCD] = 25\,\mathrm{cm}^2.$$



Solution 3:
On place les points sur une grille de coordonnées, B étant l'origine, la droite BC étant l'axe des abscisses et la droite AB étant l'axe des ordonnées. On voit que $X = (5, 0)$, $W = (0, 5)$, $C = (10, 0)$ et $Y = (10, 5)$. Ainsi, $Z = (\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$. Par la formule des lacets, on obtient que l'aire du quadrilatère $XCYZ$ est égale à

$$\left|\frac{1}{2}\left(\left(5\cdot\frac{5}{2}+\frac{5}{2}\cdot 5+10\cdot 0+10\cdot 0\right)-\left(0\cdot\frac{5}{2}+\frac{5}{2}\cdot 10+5\cdot 10+0\cdot 5\right)\right)\right| = \left|\frac{1}{2}(25-75)\right| = 25.$$

Section B

B1 Un insecte se déplace dans le plan cartésien, à partir de $(0,0)$. Au premier tour, l'insecte se déplace d'une unité vers le haut, le bas, la gauche ou la droite, avec une probabilité égale de sélection. Lors des tours suivants, l'insecte se déplace d'une unité vers le haut, le bas, la gauche ou la droite, en choisissant avec une probabilité égale parmi les trois directions autres que celle de son déplacement précédent. Par exemple, si le premier déplacement a été d'une unité vers le haut, le deuxième déplacement doit être soit d'une unité vers le bas, soit d'une unité vers la gauche, soit d'une unité vers la droite.
Après quatre déplacements, quelle est la probabilité que l'insecte soit au point de coordonnées $(2,2)$?

Réponse : $\dfrac{1}{54}$

Solution 1 :
L'insecte doit alterner entre un déplacement vers le haut et un déplacement vers la droite. Lors du premier déplacement, la probabilité que l'insecte se déplace vers le haut ou vers la droite est $\frac{1}{2}$. Lors de chaque déplacement suivant, l'insecte a trois choix (vers le bas, vers la gauche et l'autre déplacement qui n'était pas le déplacement précédent de l'insecte) ; la probabilité que l'insecte continue vers $(2,2)$ est $\frac{1}{3}$. La probabilité totale est donc de $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{54}$.

Solution 2 : La probabilité requise est égale au nombre de façons d'aller de $(0,0)$ à $(2,2)$ en quatre déplacements divisé par le nombre de tous les enchaînements possibles de quatre déplacements à partir de $(0,0)$.

Il y a deux façons d'aller de $(0,0)$ à $(2,2)$: soit HDHD or DHDH. Il y a $4 \times 3 \times 3 \times 3$ enchaînement possibles de quatre déplacements à partir de $(0,0)$. La probabilité est donc de $\frac{2}{4\times3\times3\times3} = \frac{1}{54}$.

B2 Ce mois-ci, j'ai passé 26 jours à faire de l'exercice pendant 20 minutes ou plus, 24 jours à faire de l'exercice pendant 40 minutes ou plus, et 4 jours à faire de l'exercice pendant exactement 2 heures. Je ne fais jamais d'exercice pendant moins de 20 minutes ou plus de 2 heures. Quel est le nombre minimum d'heures d'exercice que j'aurais pu faire ce mois-ci ?

Réponse : 22

Solution : Sur les quatre jours où j'ai fait 2 heures d'exercice, j'ai fait 8 heures d'exercice au total. Il y a $24 - 4 = 20$ autres jours où j'ai fait au moins 40 minutes d'exercice, ce qui représente un minimum de 800 minutes, soit 13 heures et 20 minutes. Enfin, il y a $26 - 24 = 2$ autres jours où j'ai fait au moins 20 minutes d'exercice, ce qui représente un minimum de 40 minutes, pour un total de $8 + 13 + 1 = 22$ heures.

Représentations alternatives de la solution :

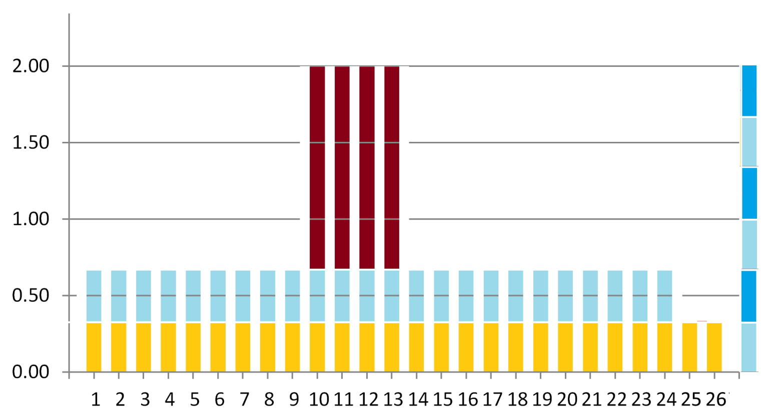
Calcul en minutes :

$$\frac{[(26-24)\times 20 + (24-4)\times 40 + 4\times 120] \text{ minutes}}{60 \text{ min / h}} = \frac{840+480}{60} = 22 \text{ heures.}$$

Calcul en heures :

$$(26-24)\times\frac{1}{3} + (24-4)\times\frac{2}{3} + 4\times 2 = 14 + 8 = 22 \text{ heures.}$$

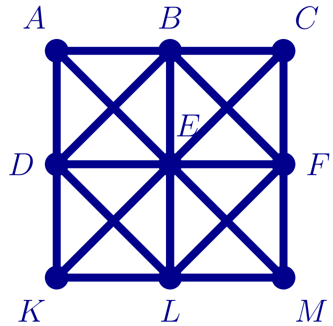
Représentation graphique des heures minimales d'exercice :



En lisant horizontalement le graph de l'exercice, on obtient (en heures) $26 \times \frac{1}{3} + 24 \times \frac{1}{3} + 4 \times \frac{4}{3}$ $= \frac{66}{3} = 22$ heures.

B3 Considérons une grille 3×3 de 9 points, avec un chemin reliant chaque paire de points adjacents, soit de manière orthogonale (c'est-à-dire horizontale ou verticale), soit de manière diagonale. Une tortue marche sur cette grille, en alternant les déplacements orthogonaux et diagonaux. On peut décrire n'importe quel enchaînement de chemins en fonction des lettres $A, \cdots, M$. Par exemple, $A - B - F$ décrit un enchaînement de deux chemins, à savoir AB et BF.

Quel est le nombre maximum de chemins que la tortue peut parcourir, étant donné qu'elle ne parcourt aucun chemin plus d'une fois ?



Réponse : 17

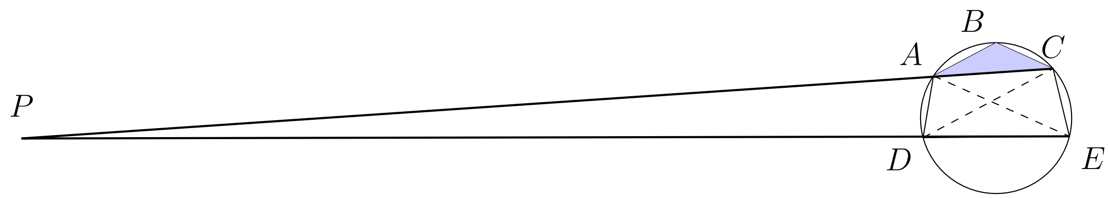
Solution : La réponse est 17. Il s'agit clairement d'une borne supérieure car il y a 8 mouvements diagonaux possibles, et donc au plus 9 mouvements orthogonaux possibles. Il y a plusieurs façons de construire cela.

Une possibilité pour un tel enchaînement de 17 déplacements est $ABDEADLKEBFECFLMEL$.

B4 Considérons le triangle ABC avec les angles $\angle BAC = 24°$ et $\angle ACB = 28°$. Le point D est construit de telle sorte que AB est parallèle à CD, $AD = BC$, et AD et BC ne sont pas parallèles. De même, le point E est construit de telle sorte que AE est parallèle à BC, $AB = CE$, et AB et CE ne sont pas parallèles. Les droites DE et AC se coupent au point P. Déterminez l'angle $\angle CPE$ (en degrés).

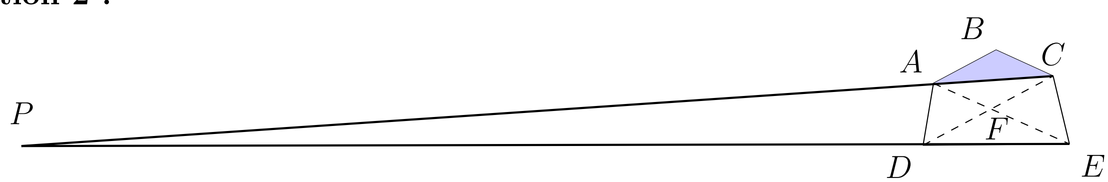
Réponse : 4

Solution 1 :



Par construction, les points A, B, C, D, E sont tous concycliques car $ABCD$ et $ABCE$ sont des trapèzes isocèles.
Du triangle ABC, on tire ceci : $\angle ABC = 180° - 24° - 28° = 128°$;
Du trapèze $ABCE$, on tire ceci : $\angle BCE = \angle ABC = 128°$;
$\angle ACE = \angle BCE - \angle BCA = 128° - 28° - 100°$;
$\angle DEA = \angle DCA = \angle BAC = 24°$;
Du trapèze $ABCE$, on tire ceci : $\angle CEA = 180° - \angle BCE = 180° - 128° = 52°$;
$DEC = DEA + AEC = 24° + 52° = 76°$;
Enfin, du triangle CPE, on tire ceci : $\angle CPE = 180° - 100° - 76° = 4°$.

Solution 2 :



Par construction, $ABCD$ et $ABCE$ sont des trapèzes isocèles semblables. Soit F le point d'intersection de AE et DC. Alors $ABCF$ est un parallélogramme.
Du triangle ABC, on tire ceci : ABC, $\angle ABC = 180° - 24° - 28° = 128°$;
Du trapèze $ABCE$, on tire ceci : $\angle BCE = \angle ABC = 128°$;
$\angle ACE = \angle BCE - \angle BCA = 128° - 28° - 100°$;
Du trapèze $ABCE$, on tire ceci : $\angle CEA = 180° - \angle BCE = 180° - 128° = 52°$;
De même, du trapèze $DABC$, on tire que $\angle ADC = 52°$.
Comme $\angle ADC = \angle CEA$ et $\angle AFD = \angle CFE$, les triangles AFD et CFE sont similaires, de sorte que $\frac{DF}{EF} = \frac{AD}{CE}$. Mais $AD = BC$ et $CE = AB$, donc $\frac{DF}{EF} = \frac{BC}{AB}$.
Comme $\angle DFE = \angle AFC = \angle ABC$, les triangles ABC et EFD sont similaires.
Ainsi, $\angle DEA = \angle BAC = 24°$;
Par conséquent, $\angle DEC = \angle DEA + \angle AEC = 24° + 52° = 76°$;
Ainsi, du triangle CPE, on tire que : $\angle CPE = 180° - 100° - 76° = 4°$.

Section C

C1 Soit F une fonction qui transforme les nombres entiers en nombres entiers selon les règles suivantes :
$F(n) = n - 3$ si $n \geq 1000$;
$F(n) = F(F(n+5))$ si $n < 1000$.

(a) Trouvez $F(999)$.

(b) Montrez que $F(984) = F(F(F(1004)))$.

(c) Trouvez $F(84)$.

(a) Réponse: 998
(a) Solution : Il faut appliquer la deuxième règle puisque $999 < 1000$. On a donc $F(999) = F(F(1004))$. On peut maintenant appliquer la première règle pour réduire ce résultat à $F(1001)$. En appliquant à nouveau la première règle, on obtient le résultat 998.
$F(999) = F(F(1004)) = F(1001) = 998$.

(b) Solution 1 : Par évaluation directe, en appliquant quatre fois la deuxième règle, on obtient
$F(984) = F(F(989)) = F(F(F(994))) = F(F(F(F(999)))) = F(F(F(F(F(1004)))))$.

En appliquant deux fois la première règle, puis la seconde, on obtient
$F(F(F(F(F(1004))))) = (F(F(F(F(1001)))) = (F(F(F(998))) = (F(F(F(F(1003))))$.

En appliquant deux fois la première règle, puis la deuxième règle, puis la première et la deuxième, on obtient
$(F(F(F(F(1003)))) = (F(F(F(1000)))) = F(F(997)) = F(F(F(1002))) = F(F(999)) = F(F(F(1004)))$.

Ainsi, $F(984) = F(F(F(1004)))$.

(b) Solution 2 : Pour cette partie et la suivante, on essaie d'écrire un tableau de valeurs pour la fonction F. Lorsque $n \geq 1000$, on sait que $F(n) = n - 3$ et dans la partie précédente, on a montré que $F(999) = 998$. Maintenant,

$$F(998) = F(F(1003)) = F(1000) = 997,$$

$$F(997) = F(F(1002)) = F(999) = 998,$$

and

$$F(996) = F(F(1001)) = F(998) = 997.$$

On voit que pour $996 \leq n \leq 1001$ les résultats alternent entre 998 et 997, à savoir $F(n) = 997$ si n est pair, et $F(n) = 998$ si n est impair. On peut le prouver pour $n \leq 995$ par induction mathématique.

Soit $k \leq 995$. Supposons que pour tout $k + 1 \leq n \leq 1001$, on a que

$$F(n) = \begin{cases} 997 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 998 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} .$$

On a alors

$$F(k) = F(F(k+5)) = \begin{cases} F(998) = 997 & \text{si } k \text{ est pair,} \\ F(997) = 998 & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases} .$$

(On utilise ici le fait que $k + 5$ est impair si k est pair et que $k + 5$ est pair si k est impair).

Ceci montre que $F(k)$ satisfait le même schéma, ce qui complète l'induction.

Muni de notre formule pour F, on voit que $F(984) = 997$ et $F(F(F(1004))) = F(F(1001)) = F(998) = 997$, comme souhaité.

(c) Réponse : 997
(c) Solution 1 : Par la formule prouvée ci-dessus dans la Solution 2 pour (b), on a $F(84) = 997$ (puisque 84 est pair).

(c) Solution 2 : On répondant à (a) on réalise que $F^n(999) = F^{n-2}(999)$ pour $n \geq 3$.

Ici $F^n(x) = F(F(F...F(x)))$, où F apparaît n fois, par exemple $F^2(x) = F(F(x))$. Plus précisément

$$F^3(999) = F^4(1004) = F^2(998) = F^3(1003) = F(997) = F^2(1002) = F(999).$$

Alors $F(84) = F^{184}(84 + 5 * 183) = F^{184}(999) = F^2(999) = F(998) = 997$.

Remarque finale: On peut également utiliser 1004 au lieu de 999. Puisque $F^n(1004) = F^{n-2}(1004)$ pour $n \geq 3$:

$F(84) = F^{185}(84 + 5 * 184) = F^{185}(1004) = F^3(1004) = F^2(1001) = F(998) = 997.$

C2

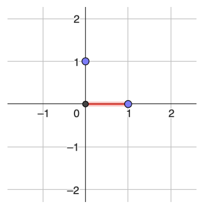
(a) Trouvez la distance entre le point $(1, 0)$ et la droite reliant l'origine et le point $(0, 1)$.

(b) Trouvez la distance entre le point $(1, 0)$ et la ligne reliant l'origine et le point $(1, 1)$.

(c) Trouvez la distance entre le point $(1, 0, 0)$ et la droite reliant l'origine et le point $(1, 1, 1)$.

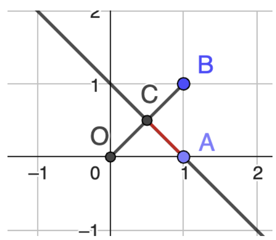
(a) Réponse : 1

(a) Solution : La droit reliant l'origine et le point $(0, 1)$ est l'axe y. On voit que le point le plus proche de $(1, 0)$ sur l'axe y est l'origine, donc la distance de $(1, 0)$ à l'axe y est 1.



(b) Réponse : $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(b) Solution : Soit $A = (1, 0)$, $B = (1, 1)$ et O l'origine. Soit C le point de la droite BO le plus proche de A. On sait que AC et BO sont perpendiculaires.



Puisque BO a une pente de 1, AC doit avoir une pente de -1. Ainsi, l'équation de la droite AC est $x + y = 1$, et elle coupe la droite BO, donnée par l'équation $y = x$, au point $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. La distance AC est donc

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - 1\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Alternativement, notons que les trois points donnés sont des sommets d'un carré unitaire. La distance requise est la distance entre un sommet d'un carré et son centre (le point d'intersection de ses diagonales), c'est-à-dire la moitié de la longueur d'une diagonale, soit $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

On peut aussi remarquer que la droite OB est la bissectrice du premier quadrant et qu'il faut trouver la jambe du triangle rectangle avec des jambes égales, les autres angles de 45° avec l'hypoténuse égale à un. Alors tant l'équation que l'équation $x = \cos 45° = \sin 45°$ conduisent immédiatement à la bonne réponse.

(c) Réponse : $\frac{\sqrt{6}}{3}$

(c) Solutions : Soit $A = (1,0,0), B = (1,1,1)$ et O l'origine. Soit C le point de la droite BO le plus proche de A.
Solution 1.1 : On peut paramétrer le point C avec les coordonnées (t,t,t) ; alors, les droites AC et BO sont perpendiculaires ; donc, le produit scalaire

$$(1,1,1) \cdot (t-1,t,t) = 0.$$

En résolvant par rapport à t, on obtient $t = \frac{1}{3}$. Donc $C = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ et la distance AC est

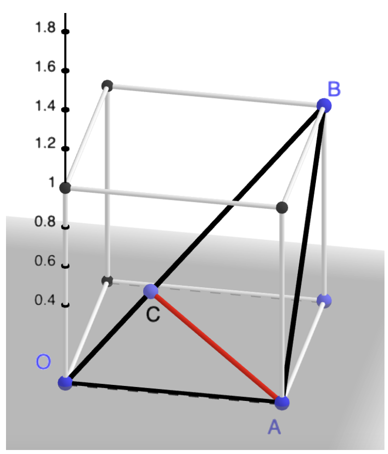
$$\sqrt{\left(\frac{1}{3}-1\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Solution 1.2 : Trouvons d'abord la projection du vecteur **OA** sur le vecteur **OB**, qui est

$$\mathbf{OC} = \frac{\mathbf{OA} \cdot \mathbf{OB}}{\|\mathbf{OB}\|^2}\mathbf{OB} = \frac{1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1}{1^2+1^2+1^2}(1,1,1) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

L'extrémité du vecteur projection $C(1/3, 1/3, 1/3)$ est le point de la droite le plus proche de A, et la distance AC est trouvée comme dans la Solution 1.1..

Solution 2 : On a besoin de la hauteur abaissée du point A et la droite BO, qui touche BO en C.



Notons que le triangle ABO est un triangle rectangle avec $AB = \sqrt{2}, BO = \sqrt{3}$ et $AO = 1$. On peut donc écrire l'aire du triangle ABO de deux façons différentes :

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{AO \cdot AB}{2} = \frac{BO \cdot AC}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}AC,$$

et on obtient ainsi

$$AC = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

C3 Alice et Bob jouent à un jeu. Il y a initialement $n \geq 1$ pierres dans une pile. Alice et Bob jouent à tour de rôle et Alice joue en premier. Lorsque c'est leur tour de jouer, Alice ou Bob peuvent lancer un dé dont les faces sont numérotées 1, 1, 2, 2, 3, 3, et prendre au moins une et au plus ce nombre de pierres de la pile. La personne qui prend la dernière pierre gagne.

(a) Si $n = 2$, quelle est la probabilité que Alice gagne ?

(b) Quelle est la plus petite valeur de n pour laquelle Bob a plus de chances de gagner que Alice ?

(c) Trouvez toutes les valeurs n pour lesquelles Bob a plus de chances de gagner que Alice.

(a) Réponse : $\frac{2}{3}$
(a) Solution : Si Alice obtient un 2 ou un 3, elle peut prendre les deux pierres de la pile et gagner. Sinon, elle obtient un 1 et doit prendre exactement une pierre ; alors, quel que soit le résultat de Bob, il peut prendre l'autre pierre pour gagner. Ainsi, Alice gagne avec une probabilité de $\frac{2}{3}$, lorsqu'elle obtient un 2 ou un 3.

(b) Réponse : 4
(b) Solution 1 : Puisque Alice gagne certainement dans le cas $n = 1$ et que, d'après la partie (a), elle a plus de chances de gagner dans le cas $n = 2$, examinons d'abord le cas $n = 3$ de trois pierres. Si Alice lance 1, elle doit prendre une pierre, laissant Bob avec deux pierres, et d'après la partie (a), il a une probabilité de $2/3$ de gagner. Si Alice lance 2, elle peut prendre soit une pierre, soit deux pierres ; mais si elle prend deux pierres, Bob gagnera certainement en prenant la dernière pierre, quelle que soit celle qu'il lance, et Alice ne devrait donc prendre qu'une pierre, laissant à Bob une probabilité de $2/3$ de gagner. Et bien sûr, si Alice lance 3 pierres, elle prendra les trois pierres et gagnera. Comme chacun de ces trois lancers a une chance de $1/3$ de se produire, la probabilité de Bob de gagner est $\frac{1}{3}(\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + 0) = \frac{4}{9}$, donc la probabilité d'Alice de gagner est $\frac{5}{9}$, soit une probabilité plus grande que celle de Bob.

De même, pour $n = 4$, Alice devrait prendre une pierre, qu'elle lance 1, 2 ou 3, car cela laisse à Bob trois pierres et une probabilité de $5/9$ de gagner, ce qui est inférieur à la probabilité de $2/3$ de gagner avec deux pierres et certainement inférieur à la certitude de gagner avec une seule pierre. Ainsi, la probabilité de Bob de gagner lorsque $n = 4$ est $\frac{1}{3}(\frac{5}{9} + \frac{5}{9} + \frac{5}{9}) = \frac{5}{9})$, ce qui est supérieur à $1/2$, donc Bob a plus de chances de gagner, et $n = 4$ est la réponse à cette partie.

(b) Solution 2 : Cette solution est similaire à la première, mais elle est présentée sous forme de tableau et utilise certaines notations générales.
Considérons trois événements E_1, E_2, E_3 : l'événement E_k se produit lorsque le dé indique k. La probabilité de chacun de ces événements est de $1/3$.

Soit P_n la probabilité qu'un joueur gagne si c'est son tour et qu'il y a actuellement n pierres dans la pile. Soit $L_n = 1 - P_n$ la probabilité que le joueur perde.

Le tableau suivant montre la meilleure action d'Alice et ses probabilités de gagner P_n et de perdre L_n.

n	Événement	Action	Prob. de gagner	P_n	L_n	Note
1	E_1 ou E_2 ou E_3	choisir 1	1	$\frac{1}{3}\times 1\times 3=1$	0	
2	E_1 E_2 ou E_3	choisir 1 choisir 2	0 1	$\frac{1}{3}\times 0+\frac{2}{3}\times 1=\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	
3	E_1 ou E_2 E_3	choisir 1 choisir 3	1/3 1	$\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times 1=\frac{5}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}>\frac{1}{3}$
4	E_1 ou E_2 ou E_3	choisir 1	4/9	$\frac{1}{3}\times\frac{4}{9}\times 3=\frac{4}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{5}{9}>\frac{4}{9}$

Puisque $L_4=\frac{5}{9}>\frac{1}{2}$, on conclut que pour $n=4$ Bob, le deuxième joueur, a plus de chances de gagner.

(b) Solution 3 : Pour cette partie et la suivante, nous introduisons quelques notions générales. Soit P_n la probabilité qu'un joueur gagne si c'est son tour et qu'il y a actuellement n pierres dans la pile. Par exemple, $P_1=1$, puisque le joueur peut toujours enlever la dernière pierre ; dans la partie précédente, nous avons calculé que $P_2=\frac{2}{3}$. Nous souhaitons dériver une formule récursive pour P_n.
Si le premier joueur obtient un 1, il doit prendre une pierre de la pile. L'autre joueur se voit alors proposer $n-1$ pierres, il a donc une probabilité P_{n-1} de gagner. Si le premier joueur obtient un 2, il a le choix ; il peut retirer 1 ou 2 pierres, selon ce qui lui convient le mieux ; le deuxième joueur a alors une probabilité $\min(P_{n-1},P_{n-2})$ de gagner. De même, si le premier joueur obtient un 3, le second joueur a une probabilité $\min(P_{n-1},P_{n-2},P_{n-3})$ de gagner. Dans tous ces cas, exactement l'un des deux joueurs gagnera, ce qui nous donne la formule suivante :

$$P_n=1-\frac{1}{3}\big(P_{n-1}+\min(P_{n-1},P_{n-2})+\min(P_{n-1},P_{n-2},P_{n-3})\big). \tag{1}$$

Notons qu'ici, on peut prendre $P_0=0$, puisque si un joueur se voit présenter 0 pierre, cela signifie que l'autre joueur a déjà gagné lors de son tour précédent. On peut donc calculer

$$P_3=1-\frac{\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+0}{3}=\frac{5}{9},$$

et

$$P_4=1-\frac{\frac{5}{9}+\frac{5}{9}+\frac{5}{9}}{3}=\frac{4}{9}.$$

Ceci complète la partie (b) : lorsqu'il y a initialement 4 pierres, Alice a une probabilité de $\frac{4}{9}$ de gagner, ce qui est inférieur à la probabilité de Bob de $1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$ de gagner.

(c) Réponse : n est un multiple de 4
Note : La formule récursive (1) doit être dérivée au début d'une solution pour la partie (c), sauf si elle a déjà été dérivée dans la partie (b), comme le montre la solution 3 ci-dessus.

(c) Solution 1 : Nous devons trouver la valeur de n pour laquelle $P_n<1/2$. Dans les parties (a) et (b), nous avons montré que

$$P_4<\frac{1}{2}<P_3<P_2<P_1, \tag{2}$$

et nous en avons déduit une identité (1).
Nous démontrons maintenant que le même schéma que dans (2) se répète pour les quatre valeurs suivantes de P_n :

$$P_8 < \frac{1}{2} < P_7 < P_6 < P_5. \tag{3}$$

Notons $C = P_4$. De (2) et (1) on calcule

$$P_5 = 1 - \frac{1}{3}\big(P_4 + \min(P_4, P_3) + \min(P_4, P_3, P_2)\big) = 1 - \frac{1}{3}\big(P_4 + P_4 + P_4\big) = 1 - C.$$

Notons que $P_4 < 1/2 < P_5$ for $C < 1/2$. Ensuite, nous appliquons (1) avec $n = 6$

$$P_6 = 1 - \frac{1}{3}\big(P_5 + \min(P_5, P_4) + \min(P_5, P_4, P_3)\big) = 1 - \frac{1}{3}\big(P_5 + P_4 + P_4\big) = \frac{2 - C}{3}.$$

Notons que $P_4 < 1/2 < P_6 < P_5$ for $C < 1/2$ (comme $1/2 < (2 - C)/3 < 1 - C$ pour tout $C < 1/2$). De nouveau, on applique (1) avec $n = 7$

$$P_7 = 1 - \frac{1}{3}\big(P_6 + \min(P_6, P_5) + \min(P_6, P_5, P_4)\big) = 1 - \frac{1}{3}\big(P_6 + P_6 + P_4\big) = \frac{5 - C}{9}.$$

Notons que $1/2 < P_7 < P_6 < P_5$ for $C < 1/2$ (comme $1/2 < (5 - C)/9 < (2 - C)/3$ pour tout $C < 1/2$). Enfin, on calcule

$$P_8 = 1 - \frac{1}{3}\big(P_7 + \min(P_7, P_6) + \min(P_7, P_6, P_5)\big) = 1 - \frac{1}{3}\big(P_7 + P_7 + P_7\big) = 1 - P_7.$$

Ceci achève la preuve de (3). Exactement le même calcul que ci-dessus (en commençant par $C = P_8$) montrera que

$$P_{12} < \frac{1}{2} < P_{11} < P_{10} < P_9.$$

et, par induction, le même schéma doit s'appliquer aux valeurs de P_n avec $4k - 3 \le n \le 4k$ pour tout $k = 1, 2, 3, \ldots$. Donc $P_n < 1/2$ si et seulement si n est un multiple de 4.

(c) Solution 2 : On peut calculer les probabilités à l'aide de la formule récursive (1).

$$P_5 = 1 - \frac{1}{3}\left(\frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9}\right) = \frac{5}{9}, \qquad P_6 = 1 - \frac{1}{3}\left(\frac{5}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9}\right) = \frac{14}{27}.$$

$$P_7 = 1 - \frac{1}{3}\left(\frac{14}{27} + \frac{14}{27} + \frac{12}{27}\right) = \frac{41}{81}, \qquad P_8 = 1 - \frac{1}{3}\left(\frac{41}{81} + \frac{41}{81} + \frac{41}{81}\right) = \frac{40}{81}.$$

$$P_9 = 1 - \frac{1}{3}\left(\frac{40}{81} + \frac{40}{81} + \frac{40}{81}\right) = \frac{41}{81}, \qquad P_{10} = 1 - \frac{1}{3}\left(\frac{41}{81} + \frac{40}{81} + \frac{40}{81}\right) = \frac{122}{243}.$$

De même, $P_{11} = \dfrac{365}{729}$ et $P_{12} = \dfrac{364}{729}$.

On voit que $P_8 < \frac{1}{2}$, et $P_{12} < \frac{1}{2}$, donc $n = 8$ et $n = 12$ sont les deux cas suivants où Bob a plus de chances de gagner qu'Alice. On peut conjecturer que n doit être un multiple de 4.

Cette conjecture doit être prouvée.

Afin de résoudre ce problème, nous allons résoudre complètement la récursion (1) pour P_n. Voyant que nos valeurs s'accumulent autour de $\frac{1}{2}$, nous remplaçons $Q_n = 2P_n - 1$. La question nous demande alors de classer tous les n pour lesquels Q_n est négatif, et notre récurrence est donnée par les cas initiaux $Q_0 = -1, Q_1 = 1$, et $Q_2 = \frac{1}{3}$. En multipliant la relation récursive par 2, on obtient

$$2P_n = 2 - \frac{2}{3}(P_{n-1} + \min(P_{n-1}, P_{n-2}) + \min(P_{n-1}, P_{n-2}, P_{n-3})),$$

et en soustrayant 1 des deux côtés, on obtient

$$\begin{aligned} Q_n = 2P_n - 1 &= \frac{3 - 2P_{n-1} - 2\min(P_{n-1}, P_{n-2}) - 2\min(P_{n-1}, P_{n-2}, P_{n-3})}{3} \\ &= -\frac{Q_{n-1} + \min(Q_{n-1}, Q_{n-2}) + \min(Q_{n-1}, Q_{n-2}, Q_{n-3})}{3}. \end{aligned}$$

En fait, nous avons supprimé le terme constant de la récursion en remplaçant P par Q. Nous voyons maintenant que $Q_3 = \frac{1}{9}$ et $Q_4 = -\frac{1}{9}$, d'après les calculs de la partie (b). En calculant quelques valeurs supplémentaires, nous obtenons

$$Q_5 = -\frac{-\frac{1}{9} - \frac{1}{9} - \frac{1}{9}}{3} = \frac{1}{9},$$

et

$$Q_6 = -\frac{\frac{1}{9} - \frac{1}{9} - \frac{1}{9}}{3} = \frac{1}{27}.$$

$$Q_7 = -\frac{\frac{1}{27} + \frac{1}{27} - \frac{1}{9}}{3} = \frac{1}{81}.$$

$$Q_8 = -\frac{\frac{1}{81} + \frac{1}{81} + \frac{1}{81}}{3} = -\frac{1}{81}.$$

Notons que $Q_{n+4} = \frac{Q_n}{9}$ pour $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

Nous allons maintenant prouver que cela est vrai pour tous les n par induction. En supposant que c'est vrai pour $n = 0, 1, \ldots, k$, on a

$$\begin{aligned} Q_{k+5} &= -\frac{Q_{k+4} + \min(Q_{k+4}, Q_{k+3}) + \min(Q_{k+4}, Q_{k+3}, Q_{k+2})}{3} \\ &= -\frac{1}{9}\frac{Q_k + \min(Q_k, Q_{k-1}) + \min(Q_k, Q_{k-1}, Q_{k-2})}{3} = \frac{1}{9}Q_{k+1}, \end{aligned}$$

comme souhaité.

On obtient ainsi la description complète de Q_n, et donc de P_n. Pour la question qui nous occupe, nous voyons que parmi les 4 premières valeurs Q_0, Q_1, Q_2, et Q_3, seul Q_0 est négatif;

par conséquent, Q_n est négatif si et seulement si n est un multiple de 4.

(c) Solution 3 : Nous pouvons utiliser l'équation (1) pour générer des valeurs de P_n comme au début de la Solution 2.
À partir de ces données, on peut conjecturer que pour chaque entier $k \geq 1$,

$$P_{4k} = \frac{3^{2k}-1}{2\cdot 3^{2k}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\cdot 3^{2k}},$$

$$P_{4k+1} = \frac{3^{2k}+1}{2\cdot 3^{2k}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3^{2k}},$$

$$P_{4k+2} = \frac{3^{2k+1}+1}{2\cdot 3^{2k+1}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6\cdot 3^{2k}},$$

et

$$P_{4k+3} = \frac{3^{2k+2}+1}{2\cdot 3^{2k+2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{18\cdot 3^{2k}}.$$

Nous allons maintenant prouver ces quatre formules par induction sur k. Notons que ces formules impliquent que

$$P_{4k} < \frac{1}{2} < P_{4k+3} < P_{4k+2} < P_{4k+1},$$

et donc $P_n < 1/2$ exactement lorsque n est un multiple de 4.
Les formules ci-dessus sont vraies pour $k=1$ et $k=2$, donc supposons qu'elles fonctionnent pour un entier positif k et regardons l'entier suivant $k+1$. On obtient

$$P_{4(k+1)} = 1 - \frac{1}{3}(P_{4k+3} + \min(P_{4k+3}, P_{4k+2}) + \min(P_{4k+3}, P_{4k+2}, P_{4k+1})) =$$

$$= 1 - \frac{1}{3}(\frac{1}{2} + \frac{1}{18\cdot 3^{2k}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{18\cdot 3^{2k}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{18\cdot 3^{2k}}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{18\cdot 3^{2k}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\cdot 3^{2(k+1)}},$$

de sorte que $P_{4(k+1)} < 1/2$;

$$P_{4(k+1)+1} = 1 - \frac{1}{3}(P_{4(k+1)} + \min(P_{4(k+1)}, P_{4k+3}) + \min(P_{4(k+1)}, P_{4k+3}, P_{4k+2})) =$$

$$= 1 - \frac{1}{3}(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\cdot 3^{2(k+1)}} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2\cdot 3^{2(k+1)}} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2\cdot 3^{2(k+1)}}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3^{2(k+1)}},$$

de sorte que $1/2 < P_{4(k+1)+1}$;

$$P_{4(k+1)+2} = 1 - \frac{1}{3}(P_{4(k+1)+1} + \min(P_{4(k+1)+1}, P_{4(k+1)}) + \min(P_{4(k+1)+1}, P_{4(k+1)}, P_{4k+3})) =$$

$$= 1 - \frac{1}{3}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3^{2(k+1)}} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2\cdot 3^{2(k+1)}} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2\cdot 3^{2(k+1)}}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6\cdot 3^{2(k+1)}},$$

de sorte que $1/2 < P_{4(k+1)+2} < P_{4(k+1)+1}$; et

$$P_{4(k+1)+3} = 1 - \frac{1}{3}(P_{4(k+1)+2} + \min(P_{4(k+1)+2}, P_{4(k+1)+1}) + \min(P_{4(k+1)+2}, P_{4(k+1)+1}, P_{4(k+1)})) =$$

$$= 1 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6 \cdot 3^{2(k+1)}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6 \cdot 3^{2(k+1)}} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^{2(k+1)}}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{18 \cdot 3^{2(k+1)}}.$$

Ainsi, les formules sont vraies pour l'entier $k+1$, et par induction elles sont vraies pour tous les entiers positifs k. On conclut donc que $P_n < 1/2$ exactement lorsque n est un multiple de 4.

C4 Étant donné un entier positif n, soit $\tau(n)$ la somme de ses diviseurs (y compris 1 et lui-même) et notons $\phi(n)$ le nombre d'entiers x, $1 \leq x \leq n$, tels que x et n sont copremiers. Par exemple, si $n = 18$, alors $\tau(18) = 1 + 2 + 3 + 6 + 9 + 18 = 39$ et $\phi(18) = 6$ puisque les nombres 1, 5, 7, 11, 13 et 17 sont copremiers à 18.

(a) Montrez que $\phi(n)\tau(n) < n^2$ pour tout entier positif n.

(b) Déterminez tous les entiers positifs n tels que $\phi(n)\tau(n) + 1 = n^2$.

(c) Montrez qu'il n'y a aucun entier positif n tel que $\phi(n)\tau(n) + 2023 = n^2$.

Veuillez noter que la condition $\boxed{n > 1}$ a été omise par erreur dans l'énoncé original du problème de la partie (a). Nos correcteurs ont accordé tous les points pour la démonstration de l'énoncé pour $n > 1$ avec ou sans commentaires sur le cas $n = 1$ pour lequel on a $\phi(n) = 1$ et $\tau(n) = 1$ et donc $\phi(n)\tau(n) = 1 = n^2$.

Solution :
Soit $n = p_1^{e_1} \dots p_k^{e_k}$, où les $p_1, \dots p_k$ sont des nombres premiers distincts et les $e_1, \dots e_k$ sont des entiers positifs. Dans ce cas,

$$\frac{\tau(n)}{n} = \prod_{i=1}^{k} \left(1 + \frac{1}{p_i} + \cdots + \frac{1}{p_i^{e_i}}\right) = \prod_{i=1}^{k} \frac{(\frac{1}{p_i})^{e_i+1} - 1}{\frac{1}{p_i} - 1} = \prod_{i=1}^{k} \frac{(\frac{1}{p_i})^{e_i} - p_i}{1 - p_i} = \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{p_i - {p_i}^{-e_i}}{p_i - 1}\right),$$

et

$$\frac{\phi(n)}{n} = \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{p_i - 1}{p_i}\right).$$

Ainsi

$$\tau(n)\phi(n) = n^2 \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{p_i - {p_i}^{-e_i}}{p_i}\right) = n^2 \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{{p_i}^{e_i+1}}\right). \qquad (*)$$

Par exemple, $18 = 2^1 3^2$ et $\tau(18)\phi(18) = 18^2(1 - \frac{1}{2^2})(1 - \frac{1}{3^3}) = 18 \times 18 \times \frac{3}{4} \times \frac{26}{27} = 6 \times 39$.
Par souci de concision, on appellera la différence suivante

$$\delta(n) = n^2 - \tau(n)\phi(n)$$

le *déficit*.

(a) D'après l'équation (*), il est clair que $\tau(n)\phi(n) < n^2$ car $\left(1 - \frac{1}{p_i^{e_i+1}}\right) < 1$ pour tout $1 \leq i \leq k$. Par conséquent, $\delta(n) > 0$.

(b) **Réponse : n est premier**
En considérant des exemples, on peut conjecturer que si n est premier alors l'équation est vraie. En effet, si $n = p$ est premier alors $\tau(n) = 1 + p$ et $\phi(n) = p - 1$, donc $\tau(n)\phi(n) + 1 = p^2 - 1 + 1 = n^2$. Nous devons vérifier si l'équation est valide ou non si n n'est pas premier.

De nouveau, l'équation (*) permet de déduire que

$$\tau(n)\phi(n) = n^2 \prod_{i=1}^{k} \frac{(p_i^{e_i+1}-1)}{p_i^{e_i+1}} = \prod_{i=1}^{k} p_i^{e_i-1}(p_i^{e_i+1}-1) = \prod_{i=1}^{k}(p_i^{2e_i} - p_i^{e_i-1}).$$

Par conséquent, si pour un certain $1 \le i \le k$, $e_i \ge 2$, alors $p_i | \tau(n)\phi(n)$ et p_i divise n^2, et donc p_i divise le déficit. Si $\delta(n) = 1$, alors tous les e_i doivent être égaux à 1. Donc $n = p_1 p_2 \dots p_k$ pour un certain k, et nous devons avoir

$$(p_1^2-1)(p_2^2-1)\dots(p_k^2-1)+1 = p_1^2 p_2^2 \dots p_k^2.$$

Cela ne peut se produire que lorsque $k = 1$, c'est-à-dire lorsque $\boxed{n \text{ est premier}}$.

(c) Dans les deux solutions ci-dessous, nous supposons que $\delta(n) = 2023$ pour un entier positif n et nous trouvons une contradiction. Ainsi, nous prouvons l'énoncé requis.

Solution 1 : On utilise la formule suivante trouvée ci-dessus :

$$\tau(n)\phi(n) = \prod_{i=1}^{k} p_i^{e_i-1}(p_i^{e_i+1}-1). \qquad (**)$$

(i) On montre d'abord que si tous les facteurs premiers p_i sont impairs et qu'au moins l'un des exposants e_i est *impair*, alors $\delta(n) \equiv 1 \bmod 4$.

En effet, dans ce cas $p_j^{e_j+1}$ est le carré d'un entier impair, donc $p_j^{e_j+1} \equiv 1 \bmod 4$. Ainsi $(p_j^{e_j+1}-1) \equiv 0 \bmod 4$ et donc $\tau(n)\phi(n) \equiv 0 \bmod 4$. De plus, n est impair donc $n^2 \equiv 1 \bmod 4$. Il s'ensuit que $\delta(n) \equiv 1 \bmod 4$.

(ii) Supposons maintenant que n est pair, c'est-à-dire que $p_1 = 2$. Si $e_1 \ge 2$, alors $2|\phi(n)\tau(n)$. Si $e_1 = 1$ et $n > 2$, alors il existe un diviseur premier impair p_2 de n, donc une fois de plus $2|\phi(n)\tau(n)$ par l'équation (*). Ainsi, pour tout $n > 2$ pair, on a : n^2, $\phi(n)\tau(n)$, et donc $\delta(n)$, sont pairs.

En appliquant les résultats (i) et (ii) à notre problème, puisque $2023 \equiv 3 \bmod 4$, on conclut ce qui suit : tout n pour lequel $\delta(n) = 2023$ doit être un carré impair. (Tous les exposants e_i doivent être pairs).

En particulier, tous les exposants $e_i \ge 2$. Alors $\prod_{i=1}^{k} p_i^{e_i-1}$ est un commun diviseur de n^2 et $\tau(n)\phi(n)$, donc un diviseur de $\delta(n)$. On peut donc déterminer les diviseurs premiers de n en observant ceux de $\delta(n)$.

Dans le cas qui nous concerne, $2023 = 7 \cdot 17^2$, on doit avoir $p_1 = 7$, $p_2 = 17$, et aucun autre diviseur premier.

Donc $n = 7^{e_1} \cdot 17^{e_2}$. Alors

$$\delta(n) = n^2 - \tau(n)\phi(n) = 7^{2e_1} \cdot 17^{2e_2} - 7^{e_1-1} \cdot 17^{e_2-1} \cdot (7^{e_1+1}-1)(17^{e_2+1}-1)$$

Ainsi

$$\delta(n) = 7^{e_1-1} \cdot 17^{e_2-1} \cdot A,$$

où

$$A = 7^{e_1+1} \cdot 17^{e_2+1} - (7^{e_1+1} - 1)(17^{e_2+1} - 1),$$

où, sous les hypothèses de ce cas, $e_1 \geq 2$ et $e_2 \geq 2$ et sont pairs. En supposant que $\delta(n) = 2023 = 7 \cdot 17^2$, il ne reste qu'une seule possibilité : $e_1 = 2$, $e_2 = 2$ et $A = 17$. Du même coup, on a trouvé que $A = 7^3 \cdot 17^3 - (7^3 - 1)(17^3 - 1)$, d'où $A \equiv 7^3 - 1 \equiv 7 \cdot (-2) - 1 \equiv -15 \bmod 17$. Ceci constitue une contradiction.

Solution 2 :

Montrons d'abord que n ne peut pas être pair. En effet, si n était pair, alors

$$\prod_{i=1}^{k} (p_i^{2e_i} - p_i^{e_i-1}) = \phi(n)\tau(n) = n^2 - 2023$$

est impair. Cela implique que pour tout $1 \leq i \leq k, p_i^{2e_i} - p_i^{e_i-1}$ est impair. Cela signifie que $k = 1, p_1 = 2$ et $e_1 - 1 = 0$, ce qui donne $n = 2$. Mais $\phi(2)\tau(2) + 2023 \neq 2^2$.

Cela montre que n doit être impair, et donc $n^2 \equiv 1 \pmod 4$. Il s'ensuit que

$$\prod_{i=1}^{k} (p_i^{2e_i} - p_i^{e_i-1}) = \phi(n)\tau(n) = n^2 - 2023 \equiv 2 \pmod 4 .$$

Maintenant, puisque n est impair, chaque terme $p_i^{2e_i} - p_i^{e_i-1}$ est pair. Puisque $\prod_{i=1}^{k}(p_i^{2e_i} - p_i^{e_i-1})$ est divisible par 2 mais pas par 4, on obtient $k = 1$ et donc $n = p_1^{e_1}$. Il s'ensuit que

$$n^2 - 2023 = p_1^{2e_1} - p_1^{e_1-1} = n^2 - p_1^{e_1-1}$$

montrant que 2023 est une puissance d'un nombre premier, ce qui représente une contradiction.