Repêchage de qualification de l'olympiade mathématique du Canada 2023

Un concours de la Société mathématique du Canada .

Examen Officiel

1. **[10 points]** Il y a deux imposteurs et sept membres d'équipage sur Polus. De combien de façons les neuf personnes peuvent-elles se répartir en trois groupes de trois, de sorte que chaque groupe comporte au moins deux membres d'équipage? On suppose que les deux imposteurs et les sept membres d'équipage sont tous discernables les uns des autres, mais que les trois groupes sont indiscernable les uns des autres.

2. **[10 points]** De combien de façon peut-on remplir une grille de taille 3×3 avec les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9, de sorte que les trois éléments d'une même ligne ou d'une même colonne forment une progression arithmétique d'une certaine raison? (Chaque nombre doit être utilisé exactement une fois)

3. **[10 points]** Soient Γ_1 et Γ_2 des cercles de rayons r_1 et r_2, respectivement. Supposons que $r_1 < r_2$. Soit T un point d'intersection de Γ_1 et Γ_2 et soit S l'intersection des tangentes externes communes de Γ_1 et Γ_2. Si l'on suppose que les tangentes à Γ_1 et Γ_2 au point T sont perpendiculaires, déterminez la longueur de ST en fonction de r_1 et r_2.

4. **[10 points]** Soit $a_1, a_2, \ldots$ une suite de nombres, où tous les a_i sont soit 1 soit -1. Montrez que si
$$\frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \cdots = \frac{p}{q}$$
pour des entiers p et q tels que 3 ne divise pas q, alors la suite $a_1, a_2, \ldots$ est périodique ; c'est-à-dire qu'il existe un certain entier positif n tel que $a_i = a_{n+i}$ pour $i = 1, 2, \ldots$.

5. **[10 points]** On dispose de six jeux de n cartes numérotées de 1 à n. Mélanie organise chacun des jeux de cartes dans un certain ordre, de sorte que pour tout nombre distinct x, y, et z dans $\{1, 2, \ldots, n\}$, il y a exactement un jeu de cartes où la carte x est supérieur à la carte y et la carte y est supérieure à la carte z. Montrez qu'il existe un certain n pour lequel Mélanie ne peut pas organiser ces six jeux de cartes de sorte à vérifier cette propriété.

6. **[10 points]** Soit ABC un triangle de cercle circonscrit Γ, soit D, E et F les points médians des côtés BC, CA et AB, respectivement. Soit encore J, K et L les points d'intersections respectifs des droites AD, BE et CF avec Γ. Montrez que l'aire du triangle JKL est au moins celle du triangle ABC.

7. **[20 points]**

   (a) Soit u, v, et w les solutions réelles de l'équation $x^3 - 7x + 7 = 0$. Montrez qu'il existe un polynôme quadratique f à coefficients rationnels tel que $u = f(v)$, $v = f(w)$ et $w = f(u)$.

   (b) Soit u, v, et w les solutions réelles de l'équation $x^3 - 7x + 4 = 0$. Montrez qu'il n'existe pas de polynôme quadratique f à coefficients rationnels tel que $u = f(v)$, $v = f(w)$ et $w = f(u)$.

8. **[20 points]** Un point commence à l'origine du plan cartésien. Chaque minute, soit il se déplace d'une unité dans la direction x, soit il subit une rotation de θ degrés dans le sens inverse des aiguilles d'une montre autour de l'origine.

   (a) Si $\theta = 90°$, déterminez tous les endroits où le point pourrait aboutir.

   (b) Si $\theta = 45°$, prouvez que pour tout point L du plan cartésien et tout nombre positif ε, il existe une suite de déplacements après quoi le point est situé à une distance inférieure à ε de L.

   (c) Déterminez tous les nombres rationnels θ tels que pour tout point L du plan cartésien et tout nombre positif ε, il existe une suite de déplacements après quoi le point est situé à une distance inférieure à ε de L.

   (d) Prouvez que lorsque θ est irrationnel, pour tout lieu L dans le plan cartésien et tout nombre positif ε, il existe une suite de déplacements après quoi le point est situé à une distance inférieure à ε de L.

