

Solutions officielles – 2022 OMJC

P1. Soit ABC un triangle acutangle de cercle circonscrit Γ . La perpendiculaire issue de A et abaissée sur BC rencontre Γ au point D . La perpendiculaire issue de B et abaissée sur AC rencontre Γ en E . Montrez que si $|AB| = |DE|$, alors $\angle ACB = 60^\circ$.

Solution. Comme AB et ED sont des cordes d'égale longueur sur un même cercle, on a alors $\angle ACB = \angle ECD$ ou $\angle ACB + \angle ECD = 180^\circ$. Effectuons le calcul :

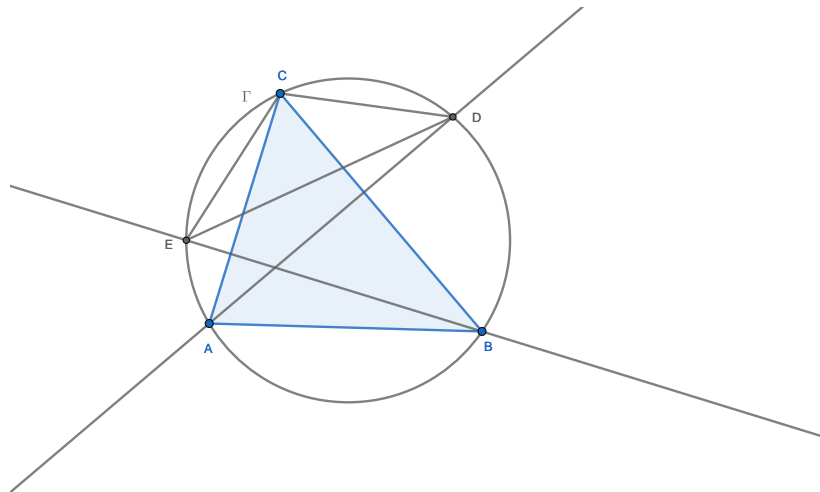


FIGURE 1 – Illustration pour le Problème 1.

$$\begin{aligned}
 \angle ECD &= \angle ECA + \angle ACB + \angle BCD \\
 &= \angle EBA + \angle ACB + \angle BAD \\
 &= 90^\circ - \angle BAC + \angle ACB + 90^\circ - \angle ABC \\
 &= (180^\circ - \angle BAC - \angle ABC) + \angle ACB \\
 &= 2\angle ACB.
 \end{aligned}$$

Si $\angle ACB = \angle ECD$ alors $\angle ACB = 0^\circ$, ce qui représente une contradiction. Ainsi $\angle ACB + \angle ECD = 180^\circ$, d'où $\angle ACB = 60^\circ$. \square

P2. On dispose d'une quantité illimitée de tétraminoes en forme de T (figure composée de quatre carrés de côtés mesurant 1) et d'un plateau $n \times n$. Vous êtes autorisés à placer des tétraminoes sur le plateau (possiblement après les avoir fait pivoter) tant qu'il n'y a aucun chevauchement de tétraminoes et qu'aucun tétramino ne débord du plateau. Pour quelles valeurs de n peut-on couvrir entièrement le plateau ?

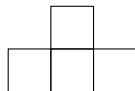
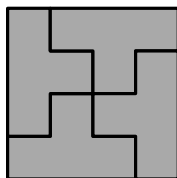


FIGURE 2 – Tétraminos en forme de T

Solution. Notons d'abord qu'on peut couvrir entièrement le plateau si et seulement si $4 \mid n$. En effet, on peut couvrir un plateau 4×4 de la façon suivante :



Puisque pour tout $m \in \mathbb{N}$, un plateau $4m \times 4m$ peut être recouvert par une grille de m^2 carrés 4×4 , tous les multiples de quatre sont possibles.

Supposons que $4 \nmid n$ et supposons que n est impair. Chaque tétramino couvre 4 carrés. Par conséquent, si l'on peut couvrir l'entièreté du plateau, alors l'aire couverte sera forcément un multiple de 4. Or cela est impossible puisque n^2 est impair.

Enfin, supposons que $n = 4k + 2$ pour un certain $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Supposons, en vue d'obtenir une contradiction, qu'il est possible de couvrir la totalité du plateau. Colorons les cases du plateau en blanc et en noir de sorte à produire un motif d'échiquier et en veillant à ce que la case située dans le coin inférieur gauche soit blanche. Comme n est pair, il y a un nombre égal de cases blanches et de cases noires. Ainsi, il y a un total de $n^2/2 = 8k^2 + 8k + 2$ cases blanches, soit un nombre pair. Notons que, puisque les cases blanches ne partagent pas de frontière commune, chaque tétramino en forme de T couvre un nombre impair de cases blanches (soit exactement 1 ou 3 cases). Comme il nous faut positionner $n^2/4 = 4k^2 + 4k + 1 \equiv 1 \pmod{2}$ tétraminoes, à savoir un nombre impair, on couvrira un nombre impair de cases blanches. Il s'agit là de la contradiction recherchée car nous avons mentionné qu'il y a un nombre pair de cases blanches à couvrir. Il s'ensuit donc qu'on ne peut pas couvrir l'entièreté du plateau. \square

P3. Supposons que des nombres réels a et b satisfont

$$ab + \sqrt{ab+1} + \sqrt{a^2+b} \cdot \sqrt{b^2+a} = 0.$$

Trouvez, preuve à l'appui, la valeur de

$$a\sqrt{b^2+a} + b\sqrt{a^2+b}.$$

Solution. Commençons par reformuler l'équation comme suit :

$$ab + \sqrt{a^2+b} \sqrt{b^2+a} = -\sqrt{ab+1}.$$

En élevant au carré, on obtient

$$\begin{aligned} a^2b^2 + 2ab\sqrt{a^2+b}\sqrt{b^2+a} + (a^2+b)(b^2+a) &= ab + 1 \\ (a^2b^2 + a^3) + 2ab\sqrt{a^2+b}\sqrt{b^2+a} + (a^2b^2 + b^3) &= 1 \\ \left(a\sqrt{b^2+a} + b\sqrt{a^2+b}\right)^2 &= 1 \\ a\sqrt{b^2+a} + b\sqrt{a^2+b} &= \pm 1. \end{aligned}$$

On montre ensuite que $a\sqrt{b^2+a} + b\sqrt{a^2+b} > 0$. Notons que

$$ab = -\sqrt{ab+1} - \sqrt{a^2+b} \cdot \sqrt{b^2+a} < 0,$$

ainsi a et b sont de signes opposés. Sans perte de généralité, on peut supposer que $a > 0 > b$. On peut donc reformuler ainsi

$$a\sqrt{b^2+a} + b\sqrt{a^2+b} = a(\sqrt{b^2+a} + b) - b(a - \sqrt{a^2+b})$$

et, comme $\sqrt{b^2+a} + b$ et $a - \sqrt{a^2+b}$ sont tous deux positifs, l'expression suivante est positive. Par conséquent,

$$a\sqrt{b^2+a} + b\sqrt{a^2+b} = 1,$$

ce qui conclut la démonstration. □

P4. Désignons par $d(k)$ le nombre d'entiers positifs qui sont des diviseurs de k . Par exemple, $d(6) = 4$ puisque 6 admet 4 diviseurs positifs, à savoir 1, 2, 3, et 6. Montrez que pour tout entier positif n ,

$$d(1) + d(3) + d(5) + \cdots + d(2n - 1) \leq d(2) + d(4) + d(6) + \cdots + d(2n).$$

Solution. Pour tout entier k et tout ensemble d'entiers S , soit $f_S(k)$ le nombre de multiples de k appartenant à S . On peut dénombrer les paires (k, s) avec $k \in \mathbb{N}$ divisant $s \in S$ de deux façons différentes, à savoir :

- Pour chaque $s \in S$, il y a $d(s)$ paires comportant s , soit une pour chaque diviseur de s .
- Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, il y a $f_k(S)$ paires comportant k , soit une pour chaque multiple de k .

Ainsi,

$$\sum_{s \in S} d(s) = \sum_{k \in \mathbb{N}} f_S(k).$$

Désignons respectivement par

$$I = \{1, 3, 5, \dots, 2n - 1\} \quad \text{et} \quad P = \{2, 4, 6, \dots, 2n\}$$

l'ensemble des entiers impairs entre 1 et $2n$ et l'ensemble des entiers pairs entre 1 et $2n$. Il suffit de montrer que

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} f_I(k) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} f_P(k).$$

Puisque les éléments de I n'ont que des diviseurs impairs,

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} f_I(k) = \sum_{k \text{ impair}} f_I(k).$$

Pour tout k impair, considérons les multiples de k entre 1 et $2n$. Ceux-ci forment une suite

$$k, 2k, 3k, \dots, \left\lfloor \frac{2n}{k} \right\rfloor k$$

qui alterne entre des termes pairs et impairs. Ou bien il y a un nombre égal de termes pairs et de termes impairs, ou il y a un terme impair de plus qu'il n'y a de termes pairs. Par conséquent, on a l'inégalité suivante

$$f_I(k) \leq f_P(k) + 1$$

pour chaque k impair. En combinant cela avec les deux observations préalables, on obtient l'inégalité souhaitée :

$$\begin{aligned}\sum_{k \in \mathbb{N}} f_I(k) &= \sum_{k \text{ impair}} f_I(k) \\ &\leq \sum_{k \text{ impair}} (f_P(k) + 1) \\ &= \sum_{k \text{ impair}} f_P(k) + n \\ &= \sum_{k \text{ impair}} f_P(k) + f_P(2) \\ &\leq \sum_{k \in \mathbb{N}} f_P(k).\end{aligned}$$

□

P5 : Soit $n \geq 2$ un entier. Initialement, le nombre 1 se trouve écrit n fois sur un tableau. Chaque minute, Vishal choisit deux nombres inscrits sur le tableau, disons a et b , les efface et écrit $a + b$ ou $\min\{a^2, b^2\}$. Après $n - 1$ minutes, il n'y a plus qu'un seul nombre sur le tableau. Notons $f(n)$ la plus grande valeur possible pour ce nombre. Montrez que

$$2^{n/3} < f(n) \leq 3^{n/3}.$$

Solution. Il est évident que $f(n)$ est une fonction strictement croissante car on peut former $f(n - 1)$ avec $n - 1$ nombres 1 auquel on ajoute un dernier 1. On peut toutefois faire mieux. Supposons que Vishal inscrit $f(n)$ sur le tableau. Après $n - 2$ minutes, il reste deux nombres ; disons que ceux-ci sont respectivement formés de x et y nombres 1, où $x + y = n$. Ces nombres sont clairement au plus $f(x), f(y)$ (on peut d'ailleurs faire en sorte qu'ils soient exactement $f(x), f(y)$) et on obtient ainsi

$$f(n) = \max_{x+y=n, 1 \leq x \leq y \leq n-1} \left(\max(f(x) + f(y), f(x)^2) \right) \quad (1)$$

où l'on exploite le fait que la fonction f est croissante afin d'obtenir $\min(f(x)^2, f(y)^2) = f(x)^2$ lorsque $x \leq y$. En particulier, $f(n+1) \geq f(n) + 1$ et $f(2n) \geq f(n)^2$ pour tout entier positif n .

Borne supérieure :

Première preuve pour la borne supérieure. On procède par induction. On peut vérifier que $f(n) = n$ pour $n \leq 4$ et cela satisfait la borne $f(n) = n \leq 3^{n/3}$. Supposons que cela est vrai pour tout $m < n$ (pour un certain $n \geq 5$) et pour x, y comme dans 1 on a

$$f(x)^2 \leq f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)^2 \leq (3^{n/6})^2 = 3^{n/3},$$

comme voulu. Il nous reste donc à montrer que $f(x) + f(y) \leq 3^{n/3}$. Par induction, il suffit de montrer que

$$3^{x/3} + 3^{y/3} \leq 3^{(x+y)/3},$$

pour $1 \leq x \leq y \leq n - 1$ et $x + y = n$. Cela équivaut à

$$1 + 3^{(y-x)/3} \leq 3^{y/3}.$$

Posons $w = 3^{(y-x)/3}$ et on exige que $3^{x/3}w \geq w + 1$. Si $x \geq 2$, alors c'est vrai car $w \geq 1$, et si $x = 1$ alors $w = 3^{(n-2)/3} \geq 3$ et le résultat demeure vrai. Ainsi, tous les termes de l'équation 1 sont au plus $3^{n/3}$ et il s'ensuit que $f(n) \leq 3^{n/3}$, ce qui achève la démonstration de la borne supérieure.

Seconde preuve pour la borne supérieure. Considérons un second jeu avec les mêmes règles mais dans lequel Vishal peut remplacer a et b par l'un ou l'autre parmi $a + b$ et ab . Soit $g(n)$ la plus grande valeur possible pour ce nouveau jeu. Alors $f(n) \leq g(n)$ puisque $\min\{a^2, b^2\} \leq ab$.

On peut vérifier que $g(n) = n$ pour $n \leq 4$. Donc $g(n) \leq 3^{n/3}$ pour ces valeurs. Si x et y sont tous deux supérieurs à 1, alors $g(x) + g(y) \leq g(x)g(y)$. Par conséquent, pour $n > 4$, on a

$$g(n) = \max \left\{ g(n-1) + 1, \max_{1 \leq x \leq n-1} g(x)g(n-x) \right\}.$$

Pour la suite, on procède comme dans la première preuve. Supposons que $n > 4$ et $g(m) \leq 3^{m/3}$ pour tout $m < n$. Si $1 \leq x \leq n-1$, alors $g(x)g(n-x) \leq 3^{x/3} 3^{(n-x)/3} = 3^{n/3}$ et $g(n-1) + 1 \leq 3^{(n-1)/3} + 1$. Or, nous avons vu dans la première preuve que cela est inférieur à $3^{n/3}$. Il s'ensuit que $f(n) \leq g(n) \leq 3^{n/3}$.

Borne inférieure :

Première preuve pour la borne inférieure. Débutons par un lemme

Lemme 1. *Soit m un entier non négatif. Alors*

$$f(2^m) \geq 2^{2^{m-1}} \quad \text{et} \quad f(3 \cdot 2^m) \geq 3^{2^m}.$$

Démonstration. On procède par induction. On peut vérifier que $f(n) = n$ pour $n \leq 3$, ce qui établit le lemme dans le cas particulier où $m = 0$. Pour un $m > 0$ quelconque, on a

$$\begin{aligned} f(2^m) &\geq f(2^{m-1})^2 \geq \left(2^{2^{m-2}}\right)^2 = 2^{2^{m-1}} \\ f(3 \cdot 2^m) &\geq f(3 \cdot 2^{m-1})^2 \geq \left(3^{2^{m-1}}\right)^2 = 3^{2^m}, \end{aligned}$$

par induction, comme voulu. □

(Ce lemme peut aussi être démontré de façon plus constructive. En gros, si $n = 2^m$, alors on peut partitionner les nombres 1 inscrits sur le tableau en 2^{m-1} paires et additionner ensuite les paires afin d'obtenir 2^{m-1} nombres 2 ($2 = 2^{2^0}$); on multiplie ensuite les paires de 2 afin d'obtenir 2^{m-2} nombres 4 ($4 = 2^{2^1}$); on multiplie ensuite les paires de nombre 4 afin d'obtenir 2^{m-3} nombres 16 ($16 = 2^{2^2}$); et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il n'y ait plus que 2 ($= 2^1$) copies de $2^{2^{m-2}}$, qu'on remplace ensuite par un $2^{2^{m-1}}$). Le processus est similaire pour $n = 3 \cdot 2^m$, à ceci près qu'à la première étape on partitionne les nombres 1 en 2^m groupes de 3; qu'on utilise l'addition à l'intérieur de chacun de ces groupes afin d'obtenir 2^m nombres 3.)

Supposons maintenant que $2^x \leq n < 3 \cdot 2^{x-1}$ pour un certain entier x . On a alors

$$f(n) \geq f(2^x) \geq 2^{2^{x-1}} > 2^{n/3},$$

comme voulu. S'il n'existe aucun tel entier x , alors il existe un entier x tel que $3 \cdot 2^{x-1} \leq n < 2^{x+1}$ auquel cas on a

$$f(n) \geq f(3 \cdot 2^{x-1}) \geq 3^{2^{x-1}} > 2^{2^{x+1}/3} > 2^{n/3}$$

où la seconde inégalité équivaut à $2^{x-1} \log(3) \geq \frac{2^{x+1}}{3} \log(2)$. En divisant par 2^x et en éliminant les dénominateurs, on montre que cela est équivalent à $3 \log(3) \geq 4 \log 2$. Or, cela est vrai puisque $3^3 = 27 > 16 = 2^4$.

Seconde preuve pour la borne inférieure. Nous montrerons par induction un résultat encore plus fort, à savoir $f(n) \geq 2^{(n+1)/3}$ pour $n \geq 2$. On peut montrer que $f(n) = n$ pour $n = 2, 3$ et 4, ce qui prouve la validité du résultat pour ces valeurs. Supposons que $n \geq 5$ et que $f(k) \geq 2^{(k+1)/3}$ pour tout $k = 2, 3, \dots, n-1$, alors

$$\begin{aligned} f(n) &\geq f(\lfloor n/2 \rfloor)^2 \\ &\geq (2^{\lfloor n/2 \rfloor + 1})^2 && \text{puisque } \lfloor n/2 \rfloor \geq 2 \\ &= 2^{2\lfloor n/2 \rfloor + 2} \\ &\geq 2^{(n+1)/3} && \text{puisque } \lfloor n/2 \rfloor \geq \frac{n-1}{2}. \end{aligned}$$

Le résultat s'ensuit par induction. □

Remarque 1. *On peut montrer que f satisfait la relation de récurrence $f(n) = n$ pour $n = 1, 2$; $f(2n) = f(n)^2$ pour $n \geq 2$ et $f(2n+1) = f(2n) + 1$ pour $n \geq 1$. La borne supérieure dans le problème est optimale (il y a égalité pour $n = 3 \cdot 2^x$) mais la borne inférieure ne l'est pas.*