

# Olympiade mathématique junior du Canada 2020

Un concours de la Société mathématique du Canada et appuyé par la profession actuarielle.



Vous trouverez la liste complète de nos commanditaires et partenaires du concours en ligne, à l'adresse suivante : <https://smc.math.ca/Concours/Commanditaires/>

## Examen officiel

1. Soit  $a_1, a_2, a_3, \dots$  une suite de nombres réels positifs qui satisfait

$$a_1 = 1 \quad \text{et} \quad a_{n+1}^2 + a_{n+1} = a_n \quad \text{pour tout nombre naturel } n.$$

Montrer que  $a_n \geq \frac{1}{n}$  pour tout entier naturel  $n$ .

2. Ziquan fait un dessin dans le plan cartésien pour son cours d'art. Il commence par placer son crayon à l'origine, puis il dessine une série de segments de droite de sorte que le  $n^{\text{e}}$  segment ait une longueur  $n$ . Il ne lève jamais son crayon de sorte que la fin du  $n^{\text{e}}$  segment est le début du  $(n + 1)^{\text{e}}$  segment. Les nouveaux segments peuvent intersecter et même complètement recouvrir les segments dessinés auparavant.

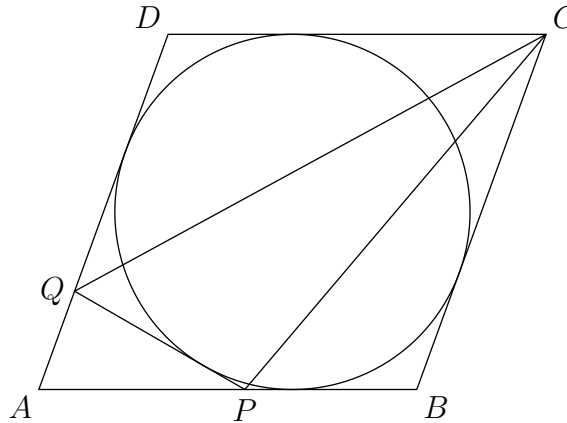
Après avoir dessiné un nombre fini de segments de droite, Ziquan s'arrête et remet son dessin à son professeur. Il passe le cours si le dessin qu'il remet a la forme d'un carré  $N$  par  $N$  pour une certaine valeur  $N$  entière, autrement il échoue. Est-il possible que Ziquan passe le cours ?

3. Soit  $S$  un ensemble composé de  $n \geq 3$  nombres réels positifs. Montrer qu'il existe au plus  $n - 2$  nombres qui sont à la fois des puissances entières de trois et qui s'écrivent comme la somme de trois éléments de  $S$ .

## Olympiade mathématique junior du Canada 2020

---

4. Un cercle est inscrit dans un losange  $ABCD$ . Les points  $P$  et  $Q$  varient sur les segments  $\overline{AB}$  et  $\overline{AD}$ , respectivement, de sorte que le segment  $\overline{PQ}$  est tangent au cercle. Montrer que pour tout segment  $\overline{PQ}$ , l'aire du triangle  $CPQ$  est constante.



5. Une bourse contient un nombre fini de pièces de monnaie. Chaque pièce a une valeur entière différente de celle des autres pièces. Est-il possible qu'il y ait exactement 2020 façons de choisir des pièces de cette bourse afin d'avoir la valeur de 2020 ?

---

**Important !**

*Prière de ne pas discuter du contenu de l'examen en ligne d'ici 24 heures.*

---