Olympiade mathématique du Canada 2022

Un concours de la Société mathématique du Canada .

Examen Officiel

P1. Supposons que des nombres réels a et b satisfont

$$ab + \sqrt{ab+1} + \sqrt{a^2+b} \cdot \sqrt{b^2+a} = 0.$$

Trouvez, preuve à l'appui, la valeur de

$$a\sqrt{b^2+a} + b\sqrt{a^2+b}.$$

P2. Désignons par $d(k)$ le nombre d'entiers positifs qui sont des diviseurs de k. Par exemple, $d(6) = 4$ puisque 6 admet 4 diviseurs positifs, à savoir 1, 2, 3, et 6. Montrez que pour tout entier positif n,

$$d(1) + d(3) + d(5) + \cdots + d(2n-1) \leq d(2) + d(4) + d(6) + \cdots + d(2n).$$

P3. Soit $n \geq 2$ un entier. Initialement, le nombre 1 se trouve écrit n fois sur un tableau. Chaque minute, Vishal choisit deux nombres inscrits sur le tableau, disons a et b, les efface et écrit $a+b$ ou $\min\{a^2, b^2\}$. Après $n-1$ minutes, il n'y a plus qu'un seul nombre sur le tableau. Notons $f(n)$ la plus grande valeur possible pour ce nombre. Montrez que

$$2^{n/3} < f(n) \leq 3^{n/3}.$$

P4. Soit n un entier positif. Un ensemble de n droites distinctes divise le plan en un certain nombre de régions (possiblement non bornées). Cet ensemble de droites est qualifié de "bon" s'il n'y a aucun triplet de droites qui se croisent en un même point. Une "coloration" est une attribution de deux couleurs à chacune des régions. La première couleur provient de l'ensemble $\{A_1, A_2\}$ et la seconde couleur provient de l'ensemble $\{B_1, B_2, B_3\}$. Un bon ensemble de droites est dit "coloriable" s'il existe une coloration telle que

(a) aucune couleur n'est attribuée à deux régions partageant une arête;

(b) pour chaque $i \in \{1,2\}$ et $j \in \{1,2,3\}$, il y a au moins une région qui se voit attribuer les couleurs A_i et B_j.

Déterminez tous les n pour lesquels toute bonne configuration de n droites est coloriable.

P5. Soit $ABCDE$ un pentagone convexe pour lequel les cinq sommets se trouvent sur un cercle et les cinq côtés sont tangents à un autre cercle à l'intérieur du pentagone. Il y a $\binom{5}{3} = 10$ triangles pouvant être formés en choisissant 3 des 5 sommets. Pour chacun de ces 10 triangles, on identifie le centre de son cercle inscrit. Montrez que ces 10 centres se trouvent sur deux cercles concentriques.

Important!

Priére de ne pas discuter du contenu de l'examen en ligne d'ici 24 heures après la fin de l'OMC!