# Olympiade mathématique junior du Canada 2022

*Un concours de la Société mathématique du Canada .*

## Examen Officiel

P1. Soit $ABC$ un triangle acutangle de cercle circonscrit $\Gamma$. La perpendiculaire issue de $A$ et abaissée sur $BC$ rencontre $\Gamma$ au point $D$. La perpendiculaire issue de $B$ et abaissée sur $AC$ rencontre $\Gamma$ en $E$. Montrez que si $|AB| = |DE|$, alors $\angle ACB = 60°$.

P2. On dispose d'une quantité illimitée de tétrominos en forme de $T$ (figure composée de quatre carrés de côtés mesurant 1) et d'un plateau $n \times n$. Vous êtes autorisés à placer des tétrominos sur le plateau (possiblement après les avoir fait pivoter) tant qu'il n'y a aucun chevauchement de tétrominos et qu'aucun tétromino ne déborde du plateau. Pour quelles valeurs de $n$ peut-on recouvrir entièrement le plateau ?

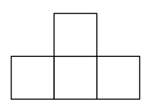

Figure 1: Tétrominos en forme de $T$

P3. Supposons que des nombres réels $a$ et $b$ satisfont

$$ab + \sqrt{ab+1} + \sqrt{a^2+b} \cdot \sqrt{b^2+a} = 0.$$

Trouvez, preuve à l'appui, la valeur de

$$a\sqrt{b^2+a} + b\sqrt{a^2+b}.$$

P4. Désignons par $d(k)$ le nombre d'entiers positifs qui sont des diviseurs de $k$. Par exemple, $d(6) = 4$ puisque 6 admet 4 diviseurs positifs, à savoir 1, 2, 3, et 6. Montrez que pour tout entier positif $n$,

$$d(1) + d(3) + d(5) + \cdots + d(2n-1) \leq d(2) + d(4) + d(6) + \cdots + d(2n).$$

P5. Soit $n \geq 2$ un entier. Initialement, le nombre 1 se trouve écrit $n$ fois sur un tableau. Chaque minute, Vishal choisit deux nombres inscrits sur le tableau, disons $a$ et $b$, les efface et écrit $a+b$ ou $\min\{a^2, b^2\}$. Après $n-1$ minutes, il n'y a plus qu'un seul nombre sur le tableau. Notons $f(n)$ la plus grande valeur possible pour ce nombre. Montrez que

$$2^{n/3} \; < \; f(n) \; \leq \; 3^{n/3}.$$

**Important!**

*Priére de ne pas discuter du contenu de l'examen en ligne d'ici 24 heures après la fin de l'OMJC!*