Repêchage de qualification de l'olympiade mathématique du Canada 2022

Un concours de la Société mathématique du Canada .

Examen Officiel

1. Soit $n \geq 2$ un entier positif. À bord d'un vaisseau spatial, on compte n membres de l'équipage. Au plus une accusation d'être un imposteur peut être dirigée par un membre de l'équipage envers un autre. De multiples accusations sont formulées et celles-ci vérifient les propriétés suivantes :

   - Chaque membre de l'équipage a formulé un nombre différent d'accusations.
   - Chaque membre de l'équipage a été visé par un nombre différent d'accusations.
   - Aucun membre de l'équipage ne s'est accusé lui-même.

   Montrez qu'il n'y a aucune paire de membres de l'équipage s'étant accusés l'un l'autre.

2. Déterminez toutes les paires d'entiers (m, n) pour lesquelles $m^2 + n$ et $n^2 + m$ sont tous deux des carrés parfaits.

3. Considérons n nombres réels $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$, pour un certain nombre entier $n \geq 2$. Supposons que pour tout entier i on a $x_{i+n} = x_i$. Montrez que

$$\sum_{i=0}^{n-1} x_i(3x_i - 4x_{i+1} + x_{i+2}) \geq 0.$$

4. Étant donné un entier non négatif n, on dit d'un polynôme F à une variable et à coefficients entiers qu'il est n-bon si :

   (a) $F(0) = 1$

   (b) Pour tout entier positif $c, F(c) > 0$, et

   (c) Il existe exactement n valeurs de c pour lesquelles $F(c)$ est premier.

   Montrez qu'il existe une infinité de polynômes non constants qui ne sont n-bons pour aucune valeur de n.

5. Alice possède quatre boîtes, 327 balles bleues et 2022 balles rouges. Les balles bleues sont numérotées de 1 à 327. Alice range d'abord chacune des balles dans une boîte (ce faisant, il est

possible que certaines boîtes demeurent vides). Un numéro entre 1 et 327 (inclusivement) est alors choisi au hasard. Alice trouve alors la boîte contenant la balle portant ce numéro et elle pige aléatoirement l'une des balles se trouvant dans cette boîte. Quelle est la probabilité maximale qu'elle pige une balle rouge ?

6. Soient a, b, c des nombres réels qui ne sont pas égaux et pour lesquels

$$a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3.$$

Montrez qu'au moins un des nombres a, b, c est négatif.

7. Soit ABC un triangle vérifiant $|AB| < |AC|$, où $|\cdot|$ signifie que l'on considère la longueur. Soit D le pied de la perpendiculaire issue de A et abaissée sur BC, soit AE la bissectrice de $\angle BAC$ et soit F le point milieu du segment BC. Supposons de plus que $\angle BAD = \angle DAE = \angle EAF = \angle FAC$. Déterminez toutes les valeurs possibles pour $\angle ABC$.

8. Soient m, n, k des entiers positifs. On place k pièces de monnaie dans les cases d'une grille $m \times n$. Une case peut contenir n'importe quel nombre de pièces (y compris zéro). Numérotons les k pièces ainsi : $C_1, C_2, \cdots C_k$. Soit r_i le nombre de pièces se trouvant dans la même rangée que C_i (en incluant la pièce C_i). Soit s_i le nombre de pièces se trouvant dans la même colonne que C_i (en incluant la pièce C_i). Montrez que

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{r_i + s_i} \leq \frac{m+n}{4}.$$

