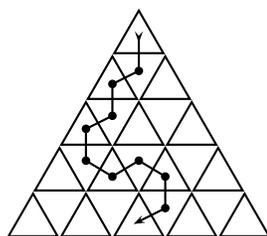


37ième Olympiade mathématique du Canada

Mercredi, le 30 mars 2005



-
1. Soit un triangle équilatéral dont le côté est de longueur n , divisé en triangles unitaires tel qu'illustré. Soit $f(n)$ le nombre de chemins allant du triangle de la rangée du haut jusqu'au triangle au centre de la rangée du bas, de façon à ce que des triangles adjacents partagent une arête commune et que le chemin ne repasse jamais par le même triangle et qu'il n'aille jamais vers le haut (d'une rangée inférieure à une rangée supérieure). Un tel chemin est illustré ci-après avec $n = 5$. Déterminer la valeur de $f(2005)$.



2. Soit (a, b, c) un triplet pythagoricien, *i.e.* un triplet d'entiers positifs tels que $a^2 + b^2 = c^2$.
- Démontrer que $(c/a + c/b)^2 > 8$.
 - Démontrer qu'il n'existe aucun entier n pour lequel il existe un triplet pythagoricien (a, b, c) satisfaisant $(c/a + c/b)^2 = n$.
3. Soit S un ensemble de $n \geq 3$ points l'intérieur d'un cercle.
- Démontrer qu'il existe trois points distincts $a, b, c \in S$ et trois points distincts A, B, C sur le cercle, tels que a est (strictement) plus près de A que tout autre point dans S , que b est (strictement) plus près de B que tout autre point dans S et que c est (strictement) plus près de C que tout autre point dans S .
 - Montrer que pour aucune valeur de n on ne peut garantir l'existence de quatre tels points (et les points correspondants sur le cercle).
4. Soit ABC un triangle de rayon circonscrit R , de périmètre P et de surface K . Déterminer la valeur maximale de KP/R^3 .
5. Un triplet ordonné d'entiers positifs (a, b, c) est dit n -puissant si $a \leq b \leq c$, $\text{pgcd}(a, b, c) = 1$, et $a^n + b^n + c^n$ est divisible par $a + b + c$. Par exemple, $(1, 2, 2)$ est 5-puissant.
- Déterminer tous les triplets ordonnés (s'il y en a) qui sont n -puissants pour tout $n \geq 1$.
 - Déterminer tous les triplets ordonnés (s'il y en a) qui sont 2004-puissants et 2005-puissants mais pas 2007-puissants.

[Noter que $\text{pgcd}(a, b, c)$ est le plus grand commun diviseur de a , b et c .]