PROBLEMS

Nous invitons les lecteurs à présenter leurs solutions, commentaires et généralisations pour n'importe quel problème présenté dans cette section. De plus, nous les encourageons à soumettre des propositions de problèmes. S'il vous plaît vous référer aux règles de soumission à l'endos de la couverture ou en ligne.

Pour faciliter l'examen des solutions, nous demandons aux lecteurs de les faire parvenir au plus tard le **1er octobre 2017**.

Un astérisque ($\star$) *signale un problème proposé sans solution.*

La rédaction souhaite remercier Rolland Gaudet, professeur titulaire à la retraite à l'Université de Saint-Boniface, d'avoir traduit les problèmes.

4211. *Proposé par Michel Bataille.*

Soient A et M deux matrices $n\times n$ avec valeurs complexes telles que A est inversible et M a rang égal à 1.

a) Evaluer $\operatorname{trace}(A^{-1}M)$ si $\det(A+M)=0$.

b) Déterminer $(A+M)^{-1}$ si $\det(A+M)\neq 0$.

4212. *Proposé par Florin Stanescu.*

Soient a, b et c les côtés d'un triangle, r le rayon du cercle inscrit et R le rayon du cercle circonscrit. Démontrer que

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}+\frac{r}{R}\leq 2.$$

4213. *Proposé par Oai Thanh Dao et Leonard Giugiuc.*

Soit ABC un triangle dont aucun angle dépasse 120° et soit I le centre de son cercle inscrit. Considérer des points $D\in AI$, $E\in BI$ et $F\in CI$ tels que

$$\begin{aligned} AD &= \left(s-a-\frac{r}{\sqrt{3}}\right)\cos\frac{A}{3},\\ BE &= \left(s-b-\frac{r}{\sqrt{3}}\right)\cos\frac{B}{3},\\ CF &= \left(s-c-\frac{r}{\sqrt{3}}\right)\cos\frac{C}{3}, \end{aligned}$$

où a, b et c sont les côtés opposés aux angles A, B et C respectivement et où s dénote le demi périmètre et r dénote le rayon du cercle inscrit. Démontrer que le triangle DEF est équilatéral.

4214. *Proposé par Leonard Giugiuc et Daniel Sitaru.*

Soit ABC un triangle dont tous les angles dépassent $\frac{\pi}{6}$. Déterminer

$$\min(\cos A \cos B \cos C).$$

4215. *Proposé par Gheorghe Alexe et George-Florin Serban.*

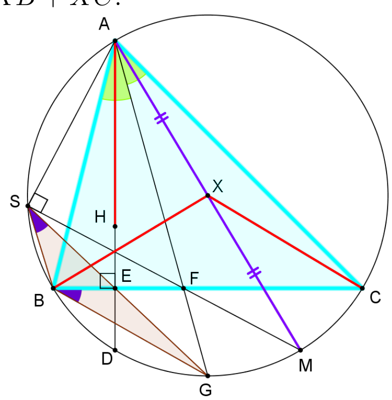
Déterminer des nombres naturels positifs a, b et c tels que

$$\frac{a+1}{b}, \quad \frac{b+1}{c} \quad \text{et} \quad \frac{c+1}{a}$$

sont tous des nombres naturels.

4216. *Proposé par Mihaela Berindeanu.*

Soit ABC un triangle avec orthocentre H et cercle circonscrit $\mathit{\Gamma}$. Or, $AH \cap BC = \{E\}$, $AH \cap \mathit{\Gamma} = \{A, D\}$, la bissectrice de l'angle A intersecte BC en F et $\mathit{\Gamma}$ en G, $EG \cap \mathit{\Gamma} = \{G, S\}$, puis $SF \cap \mathit{\Gamma} = \{S, M\}$. Si X est le mi point de AM, démontrer que $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC}$.



4217. *Proposé par Dan Stefan Marinescu et Leonard Giugiuc.*

Soit $n \geq 3$ et soit $A_0A_1 \ldots A_{n-1}$ un polygone convexe cyclique dont le centre O du cercle circonscrit coïncide avec le centre de gravité. Soient M et N deux points distincts tels que O se situe sur le segment MN et $ON = (n-1)OM$. Démontrer que

$$\sum_{k=0}^{n-1} MA_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} NA_k.$$

4218. *Proposé par Daniel Sitaru.*

Démontrer que pour tout $a, b, c \in (0, \infty)$ et tout nombre naturel $n \geq 3$, l'inégalité suivante tient

$$\frac{1}{n}\sqrt[n]{a+b+c} \geq \frac{3\sqrt[3]{abc}}{(a+b+c)^{n-1} + n - 1}.$$

4219. *Proposé par Nguyen Viet Hung.*

Soient a, b, c et d des entiers positifs distincts tels que

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+d} + \frac{d}{d+a}$$

est un entier. Démontrer que $a + b + c + d$ n'est pas premier.

4220. *Proposé par Leonard Giugiuc, Daniel Sitaru et Hung Nguyen Viet.*

Soient s et r des nombres réels tels que $0 < r < s$ et soient $a, b, c \in [s - r, s + r]$ des nombres réels tels que $a + b + c = 3s$. Démontrer que

$$ab + bc + ca \geq 3s^2 - r^2 \quad \text{et} \quad abc \geq s^3 - sr^2.$$

. . . .

4211. *Proposed by Michel Bataille.*

Let A and M be two $n \times n$ matrices with complex entries such that A is invertible and M has rank 1.

a) Evaluate $\mathrm{trace}(A^{-1}M)$ if $\det(A + M) = 0$.

b) Find $(A + M)^{-1}$ if $\det(A + M) \neq 0$.

4212. *Proposed by Florin Stanescu.*

Let a, b and c be the sides of a triangle, r the inradius and R the circumradius. Show that

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} + \frac{r}{R} \leq 2.$$

4213. *Proposed by Oai Thanh Dao and Leonard Giugiuc.*

Let ABC be a triangle with no angle more than $120°$ and let I be its incentre. Consider points $D \in AI$, $E \in BI$ and $F \in CI$ such that

$$AD = \left(s - a - \frac{r}{\sqrt{3}}\right)\cos\frac{A}{3},$$
$$BE = \left(s - b - \frac{r}{\sqrt{3}}\right)\cos\frac{B}{3},$$
$$CF = \left(s - c - \frac{r}{\sqrt{3}}\right)\cos\frac{C}{3},$$

where a, b and c are sides opposite of angles A, B and C, respectively, s is the semiperimeter and r is the inradius of ABC. Prove that triangle DEF is equilateral.

4214. *Proposed by Leonard Giugiuc and Daniel Sitaru.*

Let ABC be a triangle with every angle bigger than $\frac{\pi}{6}$. Find $\min(\cos A \cos B \cos C)$.

4215. *Proposed by Gheorghe Alexe and George-Florin Serban.*

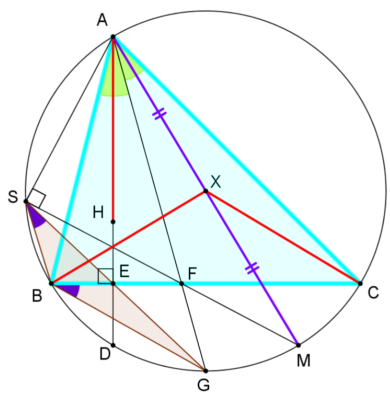
Find positive natural numbers a, b and c such that

$$\frac{a+1}{b}, \quad \frac{b+1}{c} \quad \text{and} \quad \frac{c+1}{a}$$

are all natural numbers.

4216. *Proposed by Mihaela Berindeanu.*

Let ABC be an acute triangle with orthocenter H and circumcircle Γ. Let $AH \cap BC = \{E\}$, $AH \cap \Gamma = \{A, D\}$, the bisector of angle A cuts BC in F and Γ in G, $EG \cap \Gamma = \{G, S\}$, $SF \cap \Gamma = \{S, M\}$. If X is the midpoint of AM, prove that $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC}$.



4217. *Proposed by Dan Stefan Marinescu and Leonard Giugiuc.*

Let $n \geq 3$ and consider a cyclic convex polygon $A_0A_1 \ldots A_{n-1}$ in which the circumcenter O coincides with the center of gravity. Let M and N be two distinct points such that O lies on the line segment MN and $ON = (n-1)OM$. Prove that

$$\sum_{k=0}^{n-1} MA_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} NA_k.$$

4218. *Proposed by Daniel Sitaru.*

Prove that for all $a, b, c \in (0, \infty)$ and any natural number $n \geq 3$, we have

$$\frac{1}{n}\sqrt[n]{a+b+c} \geq \frac{3\sqrt[3]{abc}}{(a+b+c)^{n-1} + n - 1}.$$

4219. *Proposed by Nguyen Viet Hung.*

Let a, b, c and d be distinct positive integers such that

$$\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+d}+\frac{d}{d+a}$$

is a integer. Prove that $a+b+c+d$ is not prime.

4220. *Proposed by Leonard Giugiuc, Daniel Sitaru and Hung Nguyen Viet.*

Let s and r be real numbers with $0 < r < s$ and let $a, b, c \in [s-r, s+r]$ be real numbers such that $a+b+c=3s$. Prove that

$$ab+bc+ca \geq 3s^2-r^2 \quad \text{and} \quad abc \geq s^3-sr^2.$$