PROBLEMS

Nous invitons les lecteurs à présenter leurs solutions, commentaires et généralisations pour n'importe quel problème présenté dans cette section. De plus, nous les encourageons à soumettre des propositions de problèmes. S'il vous plaît vous référer aux règles de soumission à l'endos de la couverture ou en ligne.

Pour faciliter l'examen des solutions, nous demandons aux lecteurs de les faire parvenir au plus tard le **1 mars 2017**.

La rédaction souhaite remercier Rolland Gaudet, professeur titulaire à la retraite à l'Université de Saint-Boniface, d'avoir traduit les problèmes.

4151. *Proposé par Leonard Giugiuc et Daniel Sitaru.*

Soit n un entier tel que $n \geq 2$. Déterminer les nombres réels t tels que

$$(a_1a_2\dots a_n)^t + (b_1b_2\dots b_n)^t + (c_1c_2\dots c_n)^t \leq 1$$

pour tout $a_i, b_i, c_i > 0$ où $a_i + b_i + c_i = 1$, $i = 1, 2, \dots, n$.

4152. *Proposé par Daniel Sitaru.*

Démontrer que si $a, b, c \in (0, \infty)$ alors :

$$\ln(1+a)^{\ln(1+b)^{\ln(1+c)}} \leq \ln^3(1+\sqrt[3]{abc}).$$

4153. *Proposé par Michel Bataille.*

Soit $ABCDEFG$ un heptagone régulier inscrit dans un cercle de rayon r. Démontrer que

$$\frac{1}{AB^3 \cdot BD} - \frac{1}{BD^3 \cdot DG} + \frac{1}{DG^3 \cdot GA} = \frac{1}{r^4}.$$

4154. *Proposé par Leonard Giugiuc.*

Déterminer X, une matrice 3×3 à coefficients entiers, telle que

$$X^4 = 3\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

4155. *Proposé par Mihaela Berindeanu.*

Démontrer que pour tout triangle ABC avec côtés de longueurs a, b, c et demi périmètre p, l'inégalité qui suit est valide :

$$\sqrt{\frac{2(p-a)}{c}} + \sqrt{\frac{2(p-b)}{a}} + \sqrt{\frac{2(p-c)}{b}} \geq \frac{p^2}{a^2+b^2+c^2-p^2}.$$

4156. *Proposé par José Luis Díaz–Barrero.*

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des nombres réels positifs tels que $x_1x_2 \ldots x_n = 1$. Démontrer que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\left(\sqrt{x_k} + \sqrt{x_{k+1}}\right)^4}{x_k + x_{k+1}} \geq 8,$$

où les indices sont considérés modulo n.

4157. *Proposé par Michael Rozenberg, Leonard Giugiuc et Daniel Sitaru.*

Soient a, b et c des nombres réels positifs tels que $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = k$ pour un certain nombre réel positif $k \geq 3$. Déterminer la valeur minimale de $ab+bc+ca$ en termes de k.

4158. *Proposé par George Apostolopoulos.*

Soient m_a, m_b et m_c les longueurs des médianes d'un triangle ABC où r est le rayon du cercle inscrit. Démontrer que

$$\frac{m_a + m_b + m_c}{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C} \geq 4r.$$

4159. *Proposé par Michel Bataille.*

Démontrer que

$$\cosh x + \cosh y + \cosh(x + y) \leq 1 + 2\sqrt{\cosh x \cosh y \cosh(x + y)}$$

pour tous nombres réels x, y. Pour quels couples (x, y) l'égalité tient-elle ?

4160. *Proposé par Leonard Giugiuc et Marian Cucoanes.*

Soit ABC un triangle dont le rayon du cercle circonscrit est R, le rayon du cercle inscrit est r et le centre du cercle inscrit est I. Soient D, E et F les centres des cercles circonscrits des triangles IBC, ICA et IAB respectivement. Démontrer que

$$\frac{Aire(DEF)}{Aire(ABC)} = \frac{R}{2r}.$$

. . . .

4151. *Proposed by Leonard Giugiuc and Daniel Sitaru.*

Let n be an integer with $n \geq 2$. Find the real numbers t such that

$$(a_1a_2 \ldots a_n)^t + (b_1b_2 \ldots b_n)^t + (c_1c_2 \ldots c_n)^t \leq 1$$

for all $a_i, b_i, c_i > 0$ with $a_i + b_i + c_i = 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

4152. *Proposed by Daniel Sitaru.*

Prove that if $a, b, c \in (0, \infty)$ then :

$$\ln(1+a)^{\ln(1+b)^{\ln(1+c)}} \leq \ln^3(1+\sqrt[3]{abc}).$$

4153. *Proposed by Michel Bataille.*

Let $ABCDEFG$ be a regular heptagon inscribed in a circle with radius r. Prove that

$$\frac{1}{AB^3 \cdot BD} - \frac{1}{BD^3 \cdot DG} + \frac{1}{DG^3 \cdot GA} = \frac{1}{r^4}.$$

4154. *Proposed by Leonard Giugiuc.*

Find a 3×3 matrix X with integer coefficients such that

$$X^4 = 3\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

4155. *Proposed by Mihaela Berindeanu.*

Show that in any triangle ABC with side lengths a, b, c and semi-perimeter p we have :

$$\sqrt{\frac{2(p-a)}{c}} + \sqrt{\frac{2(p-b)}{a}} + \sqrt{\frac{2(p-c)}{b}} \geq \frac{p^2}{a^2+b^2+c^2-p^2}.$$

4156. *Proposed by José Luis Díaz–Barrero.*

Let $x_1, x_2, \ldots, x_n$ be positive real numbers such that $x_1 x_2 \ldots x_n = 1$. Prove that

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\left(\sqrt{x_k} + \sqrt{x_{k+1}}\right)^4}{x_k + x_{k+1}} \geq 8,$$

where the subscripts are taken modulo n.

4157. *Proposed by Michael Rozenberg, Leonard Giugiuc and Daniel Sitaru.*

Let a, b and c be positive real numbers such that $a+b+c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = k$ for some positive real number $k \geq 3$. Find the minimum value of $ab+bc+ca$ in terms of k.

4158. *Proposed by George Apostolopoulos.*

Let m_a, m_b and m_c be the lengths of medians of a triangle ABC with inradius r. Prove that

$$\frac{m_a + m_b + m_c}{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C} \geq 4r.$$

4159. *Proposed by Michel Bataille.*

Prove that

$$\cosh x + \cosh y + \cosh(x+y) \leq 1 + 2\sqrt{\cosh x \cosh y \cosh(x+y)}$$

for any real numbers x, y. For which pairs (x, y) does equality hold ?

4160. *Proposed by Leonard Giugiuc and Marian Cucoanes.*

Let ABC be a triangle with circumradius R, inradius r and incenter I. Let D, E and F be the circumcenters of the triangles IBC, ICA and IAB, respectively. Prove that

$$\frac{Area(DEF)}{Area(ABC)} = \frac{R}{2r}.$$

Math Quotes

Geometry enlightens the intellect and sets one's mind right. All of its proofs are very clear and orderly. It is hardly possible for errors to enter into geometrical reasoning, because it is well arranged and orderly. Thus, the mind that constantly applies itself to geometry is not likely to fall into error. In this convenient way, the person who knows geometry acquires intelligence.

Ibn Khaldun in "The Muqaddimah. An Introduction to History", Princeton University Press.