THE OLYMPIAD CORNER

No. 344

Carmen Bruni

Les problèmes présentés dans cette section ont déjà été présentés dans le cadre d'une olympiade mathématique régionale ou nationale. Nous invitons les lecteurs à présenter leurs solutions, commentaires et généralisations pour n'importe quel problème. S'il vous plaît vous référer aux règles de soumission à l'endos de la couverture ou en ligne.

Pour faciliter l'examen des solutions, nous demandons aux lecteurs de les faire parvenir au plus tard le **1 mars 2017**.

La rédaction souhaite remercier André Ladouceur, Ottawa, ON, d'avoir traduit les problèmes.

OC286. On considère quatre joueurs de basketball, A, B, C et D. Au départ, A est en possession du ballon. Il passe le ballon à un autre joueur qui le passe à un autre et ainsi de suite. Combien y a-t-il de façons de faire revenir le ballon à A après exactement **sept** passes ? (Par exemple, A passe le ballon à C qui le passe à B qui le passe à D qui le passe à A qui le passe à B qui le passe à C qui le passe à A.)

OC287. Soit $P(x) = ax^3 + (b-a)x^2 - (c+b)x + c$ et $Q(x) = x^4 + (b-1)x^3 + (a-b)x^2 - (c+a)x + c$ deux polynômes en x, où a, b et c sont des nombres réels non nuls et $b > 0$. De plus, $P(x)$ admet trois zéros réels distincts, x_0, x_1 et x_2, qui sont aussi des zéros de $Q(x)$.

1. Démontrer que $abc > 28$.
2. Sachant que a, b et c sont des entiers non nuls et que $b > 0$, déterminer leurs valeurs possibles.

OC288. Déterminer tous les entiers strictement positifs n de manière que pour tout entier strictement positif a tel que a et n sont premiers entre eux, on ait $2n^2 \mid a^n - 1$.

OC289. Soit a, b, c, d et e des entiers distincts strictement positifs tels que $a^4 + b^4 = c^4 + d^4 = e^5$. Démontrer que $ac + bd$ est un nombre composé.

OC290. Soit ABC un triangle scalène et soit X, Y et Z des points sur les droites respectives BC, AC et AB, de manière que $\measuredangle AXB = \measuredangle BYC = \measuredangle CZA$. Soit P un point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles BXZ et CXY. Démontrer que P est situé sur le cercle ayant pour diamètre HG, H étant l'orthocentre du triangle ABC et G étant le centre de gravité de ce triangle.

. . . .

OC286. There are four basketball players A, B, C, D. Initially the ball is with A. The ball is always passed from one person to a different person. In how many ways can the ball come back to A after **seven** moves ? (For example, A passes to C who passes to B who passes to D who passes to A who passes to B who passes to C who passes to A.)

OC287. Let $P(x) = ax^3 + (b-a)x^2 - (c+b)x + c$ and $Q(x) = x^4 + (b-1)x^3 + (a-b)x^2 - (c+a)x + c$ be polynomials of x with a, b, c non-zero real numbers and $b > 0$. Suppose that $P(x)$ has three distinct real roots x_0, x_1, x_2 which are also roots of $Q(x)$.

1. Prove that $abc > 28$,
2. If a, b, c are non-zero integers with $b > 0$, find all their possible values.

OC288.Find all positive integers n such that for any positive integer a relatively prime to n, $2n^2 \mid a^n - 1$.

OC289. Let a, b, c, d, e be distinct positive integers such that

$$a^4 + b^4 = c^4 + d^4 = e^5.$$

Show that $ac + bd$ is a composite number.

OC290. Let $\triangle ABC$ be a scalene triangle and X, Y and Z be points on the lines BC, AC and AB, respectively, such that $\measuredangle AXB = \measuredangle BYC = \measuredangle CZA$. The circumcircles of BXZ and CXY intersect at P. Prove that P is on the circle with diameter HG, where H is the orthocenter and G is the barycenter of $\triangle ABC$.