

# THE OLYMPIAD CORNER

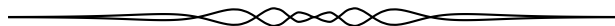
No. 344

Carmen Bruni

*Les problèmes présentés dans cette section ont déjà été présentés dans le cadre d'une olympiade mathématique régionale ou nationale. Nous invitons les lecteurs à présenter leurs solutions, commentaires et généralisations pour n'importe quel problème. S'il vous plaît vous référer aux règles de soumission à l'endos de la couverture ou en ligne.*

*Pour faciliter l'examen des solutions, nous demandons aux lecteurs de les faire parvenir au plus tard le 1 mars 2017.*

*La rédaction souhaite remercier André Ladouceur, Ottawa, ON, d'avoir traduit les problèmes.*



**OC286.** On considère quatre joueurs de basketball,  $A, B, C$  et  $D$ . Au départ,  $A$  est en possession du ballon. Il passe le ballon à un autre joueur qui le passe à un autre et ainsi de suite. Combien y a-t-il de façons de faire revenir le ballon à  $A$  après exactement **sept** passes? (Par exemple,  $A$  passe le ballon à  $C$  qui le passe à  $B$  qui le passe à  $D$  qui le passe à  $A$  qui le passe à  $B$  qui le passe à  $C$  qui le passe à  $A$ .)

**OC287.** Soit  $P(x) = ax^3 + (b-a)x^2 - (c+b)x + c$  et  $Q(x) = x^4 + (b-1)x^3 + (a-b)x^2 - (c+a)x + c$  deux polynômes en  $x$ , où  $a, b$  et  $c$  sont des nombres réels non nuls et  $b > 0$ . De plus,  $P(x)$  admet trois zéros réels distincts,  $x_0, x_1$  et  $x_2$ , qui sont aussi des zéros de  $Q(x)$ .

1. Démontrer que  $abc > 28$ .
2. Sachant que  $a, b$  et  $c$  sont des entiers non nuls et que  $b > 0$ , déterminer leurs valeurs possibles.

**OC288.** Déterminer tous les entiers strictement positifs  $n$  de manière que pour tout entier strictement positif  $a$  tel que  $a$  et  $n$  sont premiers entre eux, on ait  $2n^2 \mid a^n - 1$ .

**OC289.** Soit  $a, b, c, d$  et  $e$  des entiers distincts strictement positifs tels que  $a^4 + b^4 = c^4 + d^4 = e^5$ . Démontrer que  $ac + bd$  est un nombre composé.

**OC290.** Soit  $ABC$  un triangle scalène et soit  $X, Y$  et  $Z$  des points sur les droites respectives  $BC, AC$  et  $AB$ , de manière que  $\angle AXB = \angle BYC = \angle CZA$ . Soit  $P$  un point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles  $BXZ$  et  $CXY$ . Démontrer que  $P$  est situé sur le cercle ayant pour diamètre  $HG$ ,  $H$  étant l'orthocentre du triangle  $ABC$  et  $G$  étant le centre de gravité de ce triangle.

.....

**OC286.** There are four basketball players  $A, B, C, D$ . Initially the ball is with  $A$ . The ball is always passed from one person to a different person. In how many ways can the ball come back to  $A$  after **seven** moves? (For example,  $A$  passes to  $C$  who passes to  $B$  who passes to  $D$  who passes to  $A$  who passes to  $B$  who passes to  $C$  who passes to  $A$ .)

**OC287.** Let  $P(x) = ax^3 + (b - a)x^2 - (c + b)x + c$  and  $Q(x) = x^4 + (b - 1)x^3 + (a - b)x^2 - (c + a)x + c$  be polynomials of  $x$  with  $a, b, c$  non-zero real numbers and  $b > 0$ . Suppose that  $P(x)$  has three distinct real roots  $x_0, x_1, x_2$  which are also roots of  $Q(x)$ .

1. Prove that  $abc > 28$ ,
2. If  $a, b, c$  are non-zero integers with  $b > 0$ , find all their possible values.

**OC288.** Find all positive integers  $n$  such that for any positive integer  $a$  relatively prime to  $n$ ,  $2n^2 \mid a^n - 1$ .

**OC289.** Let  $a, b, c, d, e$  be distinct positive integers such that

$$a^4 + b^4 = c^4 + d^4 = e^5.$$

Show that  $ac + bd$  is a composite number.

**OC290.** Let  $\triangle ABC$  be a scalene triangle and  $X, Y$  and  $Z$  be points on the lines  $BC, AC$  and  $AB$ , respectively, such that  $\angle AXB = \angle BYC = \angle CZA$ . The circumcircles of  $BXZ$  and  $CXY$  intersect at  $P$ . Prove that  $P$  is on the circle with diameter  $HG$ , where  $H$  is the orthocenter and  $G$  is the barycenter of  $\triangle ABC$ .

