THE OLYMPIAD CORNER

No. 341

Carmen Bruni

The problems featured in this section have appeared in a regional or national mathematical Olympiad. Readers are invited to submit solutions, comments and generalizations to any problem. Please see submission guidelines inside the back cover or online.

To facilitate their consideration, solutions should be received by the editor by **January 1, 2017***, although late solutions will also be considered until a solution is published.*

The editor thanks André Ladouceur, Ottawa, ON, for translations of the problems.

OC271. A scalene triangle ABC is inscribed within circle ω. The tangent to the circle at point C intersects line AB at point D. Let I be the center of the circle inscribed within $\triangle ABC$. Lines AI and BI intersect the bisector of $\angle CDB$ in points Q and P, respectively. Let M be the midpoint of QP. Prove that MI passes through the middle of arc ACB of circle ω.

OC272. Find all real triples (a, b, c), for which

$$a(b^2 + c) = c(c + ab),$$

$$b(c^2 + a) = a(a + bc),$$

$$c(a^2 + b) = b(b + ca).$$

OC273. Find all functions $f : R \to R$ such that $f(x^{2015} + (f(y))^{2015}) = (f(x))^{2015} + y^{2015}$ holds for all reals x, y.

OC274. Find all triplets (x, y, p) of positive integers such that p is a prime number and $\frac{xy^3}{x+y} = p$.

OC275. Steve is piling $m \geq 1$ indistinguishable stones on the squares of an $n \times n$ grid. Each square can have an arbitrarily high pile of stones. After he finishes piling his stones in some manner, he can then perform stone moves, defined as follows. Consider any four grid squares, which are corners of a rectangle, i.e. in positions $(i, k), (i, l), (j, k), (j, l)$ for some $1 \leq i, j, k, l \leq n$, such that $i < j$ and $k < l$. A stone move consists of either removing one stone from each of (i, k) and (j, l) and moving them to (i, l) and (j, k) respectively, or removing one stone from each of (i, l) and (j, k) and moving them to (i, k) and (j, l) respectively.

Two ways of piling the stones are equivalent if they can be obtained from one another by a sequence of stone moves.

How many different non-equivalent ways can Steve pile the stones on the grid?

. . . .

OC271. Un triangle scalène ABC est inscrit dans un cercle ω. La tangente au cercle au point C coupe la droite AB au point D. Soit I le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC. Les droites AI et BI coupent la bissectrice de l'angle CDB aux points respectifs Q et P. Soit M le milieu du segment QP. Démontrer que MI passe au milieu de l'arc ACB du cercle ω.

OC272. Déterminer tous les triplets (a, b, c) de réels tels que

$$a(b^2 + c) = c(c + ab),$$

$$b(c^2 + a) = a(a + bc),$$

$$c(a^2 + b) = b(b + ca).$$

OC273. Déterminer toutes les fonctions $f : R \to R$ qui vérifient

$$f(x^{2015} + (f(y))^{2015}) = (f(x))^{2015} + y^{2015}$$

pour tous réels x, y.

OC274. Déterminer tous les triplets (x, y, p) d'entiers strictement positifs pour lesquels p est un nombre premier et $\frac{xy^3}{x+y} = p$.

OC275. Steve empile m $(m \geq 1)$ pierres indifférenciables sur un carrelage $n \times n$. Chaque case du carrelage peut recevoir un nombre arbitraire de pierres. Après avoir terminé d'empiler ses pierres d'une façon quelconque, il peut ensuite accomplir des déplacements de pierres comme suit. On considère quatre cases qui forment les coins d'un rectangle, c.-à-d. les positions $(i, k), (i, l), (j, k), (j, l)$, k, j, k et l étant des entiers tels que $1 \leq i, j, k, l \leq n$, $i < j$ et $k < l$. Un déplacement de pierres consiste à enlever une pierre de chacune des cases (i, k) et (j, l) et les ajouter aux cases respectives (i, l) et (j, k) ou à enlever une pierre de chacune des cases (i, l) et (j, k) et les ajouter aux cases respectives (i, k) et (j, l).

On dit que deux façons d'empiler les pierres sont équivalentes si une façon peut être obtenue à partir de l'autre par une série de déplacements de pierres.

Combien y a-t-il de façons non équivalentes d'empiler les pierres sur le carrelage?