THE CONTEST CORNER

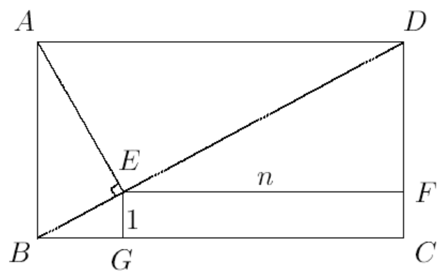
No. 42

John McLoughlin

Les problèmes présentés dans cette section ont déjà été présentés dans le cadre d'un concours mathématique de niveau secondaire ou de premier cycle universitaire, ou en ont été inspirés. Nous invitons les lecteurs à présenter leurs solutions, commentaires et généralisations pour n'importe quel problème. S'il vous plaît vous référer aux règles de soumission à l'endos de la couverture ou en ligne.

Pour faciliter l'examen des solutions, nous demandons aux lecteurs de les faire parvenir au rédacteur au plus tard le **1er décembre 2016** *; toutefois, les solutions reçues après cette date seront aussi examinées jusqu'au moment de la publication.*

CC206. Un rectangle $ABCD$ a une diagonale de longeur d. On abaisse une perpendiculaire AE à la diagonale BD. Le rectangle $EFCG$ a des côtés de longueurs n et 1. Démontrer que $d^{2/3} = n^{2/3} + 1$.



CC207. On considère les dix nombres $ar, ar^2, \ldots, ar^{10}$. Déterminer leur produit, sachant que leur somme est égale à 18 et que la somme de leurs inverses est égale à 6.

CC208.

a) Soit deux chiffres A et B. (A et B sont donc des symboles de 0 à 9 utilisés pour écrire les entiers.) Sachant que le produit des deux nombres de trois chiffres, $2A5$ et $13B$, est divisible par 36, déterminer les *quatre* couples (A, B) possibles. Justifier sa réponse.

b) Un entier n est un multiple de 7 si $n = 7k$ pour un entier quelconque k.

   i) Si a et b sont des entiers tels que $10a+b = 7m$ pour un entier quelconque m, démontrer que $a - 2b$ est un multiple de 7.

   ii) Si c et d sont des entiers tels que $5c+4d$ est un multiple de 7, démontrer que $4c - d$ est aussi un multiple de 7.

CC209.

a) Déterminer les deux valeurs de x qui vérifient $x^2 - 4x - 12 = 0$.

b) Déterminer *la* valeur de x qui vérifie $x - \sqrt{4x + 12} = 0$. Justifier sa réponse.

c) Déterminer toutes les valeurs réelles de c pour lesquelles l'équation

$$x^2 - 4x - c - \sqrt{8x^2 - 32x - 8c} = 0$$

admet exactement deux racines réelles distinctes.

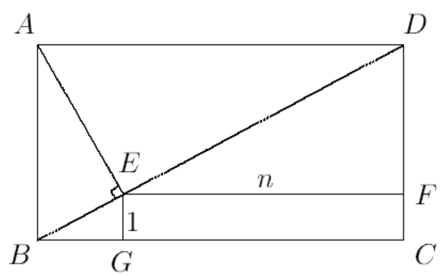
CC210. Il existe un unique triplet d'entiers strictement positifs (a, b, c) tel que $a \leq b \leq c$ et

$$\frac{25}{84} = \frac{1}{a} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{abc}.$$

Déterminer la valeur $a + b + c$.

. . . .

CC206. A rectangle $ABCD$ has diagonal of length d. The line AE is drawn perpendicular to the diagonal BD. The sides of the rectangle $EFCG$ have lengths n and 1. Prove that $d^{2/3} = n^{2/3} + 1$.



CC207. Consider the ten numbers $ar, ar^2, \ldots, ar^{10}$. If their sum is 18 and the sum of their reciprocals is 6, determine their product.

CC208.

a) Let A and B be digits (that is, A and B are integers between 0 and 9 inclusive). If the product of the three-digit integers $2A5$ and $13B$ is divisible by 36, determine with justification the *four* possible ordered pairs (A, B).

b) An integer n is said to be a multiple of 7 if $n = 7k$ for some integer k.

  i) If a and b are integers and $10a + b = 7m$ for some integer m, prove that $a - 2b$ is a multiple of 7.

ii) If c and d are integers and $5c + 4d$ is a multiple of 7, prove that $4c - d$ is also a multiple of 7.

CC209.

a) Determine the two values of x such that $x^2 - 4x - 12 = 0$.

b) Determine the *one* value of x such that $x - \sqrt{4x + 12} = 0$. Justify your answer.

c) Determine all real values of c such that

$$x^2 - 4x - c - \sqrt{8x^2 - 32x - 8c} = 0$$

has precisely two distinct real solutions for x.

CC210. There is a unique triplet of positive integers (a, b, c) such that $a \leq b \leq c$ and

$$\frac{25}{84} = \frac{1}{a} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{abc}.$$

Determine $a + b + c$.