PROBLEMS

Nous invitons les lecteurs à présenter leurs solutions, commentaires et généralisations pour n'importe quel problème présenté dans cette section. De plus, nous les encourageons à soumettre des propositions de problèmes. S'il vous plaît vous référer aux règles de soumission à l'endos de la couverture ou en ligne.

Pour faciliter l'examen des solutions, nous demandons aux lecteurs de les faire parvenir au rédacteur au plus tard le **1er décembre 2016** *; toutefois, les solutions reçues après cette date seront aussi examinées jusqu'au moment de la publication.*

La rédaction souhaite remercier André Ladouceur, Ottawa, d'avoir traduit les problèmes.

4085. *Proposé par José Luis Díaz-Barrero. Correction.*

Soit ABC un triangle acutangle. Démontrer que

$$\sqrt[4]{\sin(\cos A)\cdot\cos B}+\sqrt[4]{\sin(\cos B)\cdot\cos C}+\sqrt[4]{\sin(\cos C)\cdot\cos A}<\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

4111. *Proposé par Mihaela Berindeanu.*

Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC et R son rayon. P est un point quelconque sur le côté BC du triangle. Déterminer la valeur de R, sachant que le produit $PA\cdot PB\cdot PC$ a une valeur maximale de 2016.

4112. *Proposé par Ardak Mirzakhmedov et Leonard Giugiuc.*

Soit ABC un triangle acutangle. Démontrer que

$$\sqrt{96\cos^2 A+25}+\sqrt{96\cos^2 B+25}+\sqrt{96\cos^2 C+25}\geq 21.$$

4113. *Proposé par Dragoljub Milošević.*

Soit m_a, m_b et m_c les longueurs des médianes d'un triangle, w_a, w_b et w_c les longueurs des bissectrices, r le rayon du cercle inscrit et R le rayon du cercle circonscrit au triangle. Démontrer que

$$\frac{m_a}{w_a}+\frac{m_b}{w_b}+\frac{m_c}{w_c}\leq\frac{1}{2}+\frac{r}{R}+\frac{R}{r}.$$

4114. *Proposé par Michel Bataille.*

Soit BC un segment de droite dans le plan. Déterminer le lieu géométrique des points A pour lesquels le centre de gravité G du triangle ABC vérifie $\angle GAB=\angle GBC$ et $\angle GAC=\angle GCB$.

4115. *Proposé par Daniel Sitaru.*

Démontrer que

$$n^{\ln 2} \leq \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[n+1]{n} \cdot \sqrt[n+2]{n} \cdot \ldots \cdot \sqrt[2n]{n}$$

pour tout entier n ($n \geq 2$).

4116. *Proposé par George Apostolopoulos.*

Soit a, b et c des réels strictement positifs tels que $a + b + c = 3$. Déterminer la valeur minimale de l'expression

$$a^2(a^2 - a + 1) + b^2(b^2 - b + 1) + c^2(c^2 - c + 1).$$

4117. *Proposé par Martin Lukarevski.*

La suite (x_n) est définie de façon récursive par $x_0 = 0, x_1 = 1$ et

$$x_{n+1} = x_n\sqrt{x_{n-1}^2 + 1} + x_{n-1}\sqrt{x_n^2 + 1}, \quad n \geq 1.$$

Déterminer une expression pour x_n.

4118. *Proposé par D. M. Bătineţu-Giurgiu et Neculai Stanciu.*

Soit $a \in (0, \frac{\pi}{2}]$ et $b \in [\frac{\pi}{2}, \pi)$ tels que $a + b = \pi$. Calculer $\int_a^b \dfrac{x}{\sin x} dx$.

4119. *Proposé par Ovidiu Furdui.*

Soit $m, n, p \in \mathbb{N}$ ($m \neq n$) et soit A et B des matrices 2×2 dont les éléments sont complexes et telles que $mAB - nBA = pI_2$. Démontrer que

$$(AB - BA)^2 = O_2.$$

4120. *Proposé par Leonard Giugiuc et Daniel Sitaru.*

Déterminer la valeur minimale de la fonction $f : [1, 2] \mapsto \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \sqrt{\frac{8 - 3x}{x}} + 2\sqrt{4x + 1} - \sqrt{4x^2 - 8x + 49}.$$

. . . .

4085. *Proposed by José Luis Díaz-Barrero. Correction.*

Let ABC be an acute triangle. Prove that

$$\sqrt[4]{\sin(\cos A) \cdot \cos B} + \sqrt[4]{\sin(\cos B) \cdot \cos C} + \sqrt[4]{\sin(\cos C) \cdot \cos A} < \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

4111. *Proposed by Mihaela Berindeanu.*

The circumscribed circle of $\triangle ABC$ has circumcenter O and circumradius R. Let P be a point on the side BC. Calculate R given that the maximum value of the product $PA \cdot PB \cdot PC$ is 2016.

4112. *Proposed by Ardak Mirzakhmedov and Leonard Giugiuc.*

Let ABC be an acute triangle. Prove that

$$\sqrt{96\cos^2 A + 25} + \sqrt{96\cos^2 B + 25} + \sqrt{96\cos^2 C + 25} \geq 21.$$

4113. *Proposed by Dragoljub Milošević.*

Let m_a, m_b and m_c be the lengths of medians, w_a, w_b and w_c be the lengths of the angle bisectors, r and R be the the inradius and the circumradius, respectively, of a triangle. Prove that

$$\frac{m_a}{w_a} + \frac{m_b}{w_b} + \frac{m_c}{w_c} \leq \frac{1}{2} + \frac{r}{R} + \frac{R}{r}.$$

4114. *Proposed by Michel Bataille.*

In the plane, let BC be a given line segment. Find the locus of A such that the centroid G of the triangle ABC satisfies $\angle GAB = \angle GBC$ and $\angle GAC = \angle GCB$.

4115. *Proposed by Daniel Sitaru.*

Prove that for all natural numbers $n \geq 2$, we have

$$n^{\ln 2} \leq \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[n+1]{n} \cdot \sqrt[n+2]{n} \cdot \ldots \cdot \sqrt[2n]{n}.$$

4116. *Proposed by George Apostolopoulos.*

Let a, b, c be positive real numbers such that $a + b + c = 3$. Find the minimum value of the expression

$$a^2(a^2 - a + 1) + b^2(b^2 - b + 1) + c^2(c^2 - c + 1).$$

4117. *Proposed by Martin Lukarevski.*

The sequence (x_n) is given recursively by $x_0 = 0, x_1 = 1$,

$$x_{n+1} = x_n\sqrt{x_{n-1}^2 + 1} + x_{n-1}\sqrt{x_n^2 + 1}, \quad n \geq 1.$$

Find x_n.

4118. *Proposed by D. M. Bătineţu-Giurgiu and Neculai Stanciu.*

Let $a \in (0, \frac{\pi}{2}], b \in [\frac{\pi}{2}, \pi)$ with $a + b = \pi$. Calculate $\int_a^b \dfrac{x}{\sin x} dx$.

4119. *Proposed by Ovidiu Furdui.*

Let $m, n, p \in \mathbb{N}$, $m \neq n$, and let A and B be 2×2 matrices with complex entries for which $mAB - nBA = pI_2$. Prove that

$$(AB - BA)^2 = O_2.$$

4120. *Proposed by Leonard Giugiuc and Daniel Sitaru.*

Find the minimum value of the function $f : [1, 2] \mapsto \mathbb{R}$, where

$$f(x) = \sqrt{\frac{8 - 3x}{x}} + 2\sqrt{4x + 1} - \sqrt{4x^2 - 8x + 49}.$$