THE OLYMPIAD CORNER

No. 340

Carmen Bruni

Les problèmes présentés dans cette section ont déjà été présentés dans le cadre d'une olympiade mathématique régionale ou nationale. Nous invitons les lecteurs à présenter leurs solutions, commentaires et généralisations pour n'importe quel problème. S'il vous plaît vous référer aux règles de soumission à l'endos de la couverture ou en ligne.

Pour faciliter l'examen des solutions, nous demandons aux lecteurs de les faire parvenir au rédacteur au plus tard le **1er décembre 2016** *; toutefois, les solutions reçues après cette date seront aussi examinées jusqu'au moment de la publication.*

La rédaction souhaite remercier André Ladouceur, Ottawa, ON, d'avoir traduit les problèmes.

OC266. Soit D un point sur le côté BC d'un triangle acutangle ABC. Soit O_1 et O_2 les centres respectifs des cercles circonscrits aux triangles ABD et ACD. Démontrer que la droite qui joint le centre du cercle circonscrit au triangle ABC et l'orthocentre du triangle O_1O_2D est parallèle à BC.

OC267. On a empilé des disques rouges et des disques bleus de même grandeur de manière à former une pile de forme triangulaire. Le niveau supérieur de la pile compte un disque et chaque niveau compte un disque de plus que le niveau immédiatement au-dessus. Chaque disque qui n'est pas au niveau le plus bas touche à deux disques au-dessous de lui et ce disque est bleu si les deux disques sont de la même couleur. Autrement, il est rouge.

Supposons que le niveau le plus bas compte 2048 disques dont 2014 sont rouges. Quelle est la couleur du disque au niveau supérieur ?

OC268. Soit $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ l'ensemble des entiers supérieurs ou égaux à 0. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{Z}_{\geq 0} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ qui vérifient la relation

$$f(f(f(n))) = f(n+1) + 1$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

OC269. Soit x, y, z les nombres réels qui satisfont à

$$(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 8 \quad \text{et} \quad x^3 + y^3 + z^3 = 1.$$

Déterminer la valeur minimale de $x^4 + y^4 + z^4$.

OC270. Étant donné un entier pair strictement positif n, on place chacun des nombres $1, 2, \ldots, n^2$ sur une des cases d'un damier $n \times n$. Soit S_1 la somme des nombres placés sur les cases noires et S_2 la somme des nombres placés sur les cases blanches. Déterminer tous les n pour lesquels il est possible d'obtenir $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{39}{64}$.

. . . .

OC266. In an acute triangle ABC, a point D lies on the segment BC. Let O_1, O_2 denote the circumcentres of triangles ABD and ACD respectively. Prove that the line joining the circumcentre of triangle ABC and the orthocentre of triangle O_1O_2D is parallel to BC.

OC267. Blue and red circular disks of identical size are packed together to form a triangle. The top level has one disk and each level has 1 more disk than the level above it. Each disk not at the bottom level touches two disks below it and its colour is blue if these two disks are of the same colour. Otherwise its colour is red.

Suppose the bottom level has 2048 disks of which 2014 are red. What is the colour of the disk at the top ?

OC268. Let $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ be the set of all nonnegative integers. Find all the functions $f : \mathbb{Z}_{\geq 0} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ satisfying the relation

$$f(f(f(n))) = f(n+1) + 1$$

for all $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

OC269. Let x, y, z be the real numbers that satisfy the following :

$$(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 8, x^3 + y^3 + z^3 = 1.$$

Find the minimum value of $x^4 + y^4 + z^4$.

OC270. For even positive integer n we put all numbers $1, 2, ..., n^2$ into the squares of an $n \times n$ chessboard (each number appears once and only once). Let S_1 be the sum of the numbers put in the black squares and S_2 be the sum of the numbers put in the white squares. Find all n such that we can achieve $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{39}{64}$.