# PROBLEMS

*Readers are invited to submit solutions, comments and generalizations to any problem in this section. Moreover, readers are encouraged to submit problem proposals. Please see submission guidelines inside the back cover or online.*

*To facilitate their consideration, solutions should be received by the editor by* **December 1, 2016**, *although late solutions will also be considered until a solution is published.*

*The editor thanks Rolland Gaudet, retired professor of the University College of Saint Boniface for translations of the problems.*

**4101**. *Proposed by Max Alekseyev.*

Let $n$ be an integer such that $3^n \equiv 7 \pmod{n}$. Show that 127 cannot divide $n$.

**4102**. *Proposed by Kimberly D. Apple and Eugen J. Ionascu.*

Suppose the faces of a regular icosahedron are coloured with blue or yellow in such a way that every blue face shares an edge with at most one other blue face. What is the maximum possible number of blue faces?

**4103**. *Proposed by Dan Stefan Marinescu, Leonard Giugiuc and Daniel Sitaru.*

Let $x, y$ and $z$ be positive numbers such that $x + y + z = 1$. Show that

$$\sum_{\text{cyc}}[(1-x)\sqrt{3yz(1-y)(1-z)}] \geq 4\sqrt{xyz}.$$

**4104**. *Proposed by Daniel Sitaru.*

Prove that for $0 < a \leq b \leq c \leq d < 2$, we have

$$5(ab^4 + bc^4 + cd^4 + 16d) < 5(b^5 + c^5 + d^5 + 16a) + 128.$$

**4105**. *Proposed by Mihaela Berindeanu.*

Let $ABC$ be a triangle with centroid $G$. Let $A', B'$ and $C'$ be the feet of altitudes on the sides of the triangle from the vertices $A, B$ and $C$, respectively. Let $G'$ be the centroid of $A'B'C'$. If $GG' \parallel BC$, find all possible values of angle A.

**4106**. *Proposed by D.M. Bătineţu-Giurgiu and Neculai Stanciu.*

Let $ABC$ be a triangle with $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ and circumradius $R$. Show that

$$\frac{b+c}{a^5} + \frac{c+a}{b^5} + \frac{a+b}{c^5} \geq \frac{2}{3R^4}.$$

**4107**. *Proposed by Lorian Saceanu.*

Let $ABC$ be an acute triangle with inradius $r$, circumradius $R$ and semiperimeter $s$. Prove that

$$\sqrt{\left(\frac{9}{4}+\frac{r}{2R}\right)^2+\frac{r}{R}} \leq \cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2} \leq \frac{s}{\frac{R}{2}+r}.$$

**4108**. *Proposed by Alessandro Ventullo.*

a) Write 2010 as a sum of consecutive squares.

b) Is it possible to write 2014 as the sum of several consecutive squares?

**4109**. *Proposed by Mehtaab Sawhney.*

Let $k$ and $n$ be positive integers. Compute the following sum in closed form:

$$\sum_{r=1}^{k}\sum_{\ell=r}^{k}(-1)^{k-r}\binom{k}{r}\binom{nr}{k+\ell}\binom{k-r}{k-\ell}n^{k-\ell}.$$

**4110**. *Proposed by Michel Bataille.*

Find all functions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ such that

$$xf(x+y)=(x+y)f\left(\frac{x}{y}f(y)\right)$$

for all real numbers $x,y$ with $y\neq 0$.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**4101**. *Proposé par Max Alekseyev.*

Soit $n$ un entier tel que $3^n \equiv 7 \pmod{n}$. Démontrer que 127 ne peut pas diviser $n$.

**4102**. *Proposé par Kimberly D. Apple and Eugen J. Ionascu.*

Supposons que les faces d'un icosaèdre sont colorées bleu ou jaune de façon à ce que toute face bleue partage une arête avec au plus une autre face bleue. Quel est le nombre maximum possible de faces bleues?

**4103**. *Proposé par Dan Stefan Marinescu, Leonard Giugiuc and Daniel Sitaru.*

Soient $x,y$ et $z$ des nombres positifs tels que $x+y+z=1$. Démontrer que

$$\sum_{\text{cyc}}\left[(1-x)\sqrt{3yz(1-y)(1-z)}\right]\geq 4\sqrt{xyz}.$$

**4104**. *Proposé par Daniel Sitaru.*

Démontrer que si $0 < a \leq b \leq c \leq d < 2$, alors la suivante tient

$$5(ab^4 + bc^4 + cd^4 + 16d) < 5(b^5 + c^5 + d^5 + 16a) + 128.$$

**4105**. *Proposé par Mihaela Berindeanu.*

Soit $ABC$ un triangle avec centroïde $G$. Soient $A'$, $B'$ et $C'$ les pieds des altitudes émanant de $A$, $B$ et $C$ respectivement. Soit $G'$ le centroïde de $A'B'C'$. Si $GG' \parallel BC$, déterminer toute valeur possible pour l'angle $A$.

**4106**. *Proposé par D.M. Bătineţu-Giurgiu and Neculai Stanciu.*

Soit $ABC$ un triangle où $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ et où $R$ dénote le rayon du cercle circonscrit. Démontrer que

$$\frac{b+c}{a^5} + \frac{c+a}{b^5} + \frac{a+b}{c^5} \geq \frac{2}{3R^4}.$$

**4107**. *Propoé par Lorian Saceanu.*

Soit $ABC$ un triangle aigu, où $r$ est le rayon du cercle inscrit, $R$ est le rayon du cercle circonscrit et $s$ est le demi périmètre. Démontrer que

$$\sqrt{\left(\frac{9}{4} + \frac{r}{2R}\right)^2 + \frac{r}{R}} \leq \cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} \leq \frac{s}{\frac{R}{2} + r}.$$

**4108**. *Proposé par Alessandro Ventullo.*

a) Représenter 2010 comme somme de carrés consécutifs.

b) Est-ce possible de représenter 2014 comme somme de plusieurs carrés consécutifs.

**4109**. *Proposé par Mehtaab Sawhney.*

Soient $k$ et $n$ des entiers positifs. Déterminer

$$\sum_{r=1}^{k} \sum_{\ell=r}^{k} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} \binom{nr}{k+\ell} \binom{k-r}{k-\ell} n^{k-\ell}$$

en forme close.

**4110**. *Proposé par Michel Bataille.*

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$xf(x+y) = (x+y)f\left(\frac{x}{y}f(y)\right)$$

pour tous nombres réels $x, y$ tels que $y \neq 0$.