THE OLYMPIAD CORNER

No. 339

Carmen Bruni

The problems featured in this section have appeared in a regional or national mathematical Olympiad. Readers are invited to submit solutions, comments and generalizations to any problem. Please see submission guidelines inside the back cover or online.

To facilitate their consideration, solutions should be received by the editor by **December 1, 2016***, although late solutions will also be considered until a solution is published.*

The editor thanks The editor thanks Rolland Gaudet, retired professor of the University College of Saint Boniface, for translations of the problems.

OC261. Show that there are no 2-tuples (x, y) of positive integers satisfying the equation $(x+1)(x+2)\cdots(x+2014) = (y+1)(y+2)\cdots(y+4028)$.

OC262. In obtuse triangle ABC, with the obtuse angle at A, let D, E, F be the feet of the altitudes through A, B, C respectively. DE is parallel to CF, and DF is parallel to the angle bisector of $\angle BAC$. Find the angles of the triangle.

OC263. An integer $n \geq 3$ is called *special* if it does not divide

$$(n-1)!\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right).$$

Find all special numbers n such that $10 \leq n \leq 100$.

OC264. A positive integer is called *beautiful* if it can be represented in the form $\frac{x^2+y^2}{x+y}$ for two distinct positive integers x, y. A positive integer that is not beautiful is *ugly*.

1. Prove that 2014 is a product of a beautiful number and an ugly number.
2. Prove that the product of two ugly numbers is also ugly.

OC265. Five airway companies operate in a country consisting of 36 cities. Between any pair of cities exactly one company operates two way flights. If some air company operates between cities A, B and B, C we say that the ordered triple A, B, C is properly-connected. Determine the largest possible value of k such that no matter how these flights are arranged there are at least k properly-connected triples.

. . . .

OC261. Démontrer qu'il n'existe aucun couple d'entiers positifs (x, y) satisfaisant à l'équation $(x+1)(x+2)\cdots(x+2014) = (y+1)(y+2)\cdots(y+4028)$.

OC262. Soit un triangle obtus ABC, où l'angle obtus se situe à A, et soient D, E, F les pieds des altitudes provenant de A, B, C respectivement. DE est parallèle à CF et DF est parallèle à la bissectrice de $\angle BAC$. Déterminer les angles du triangle.

OC263. Un entier $n \geq 3$ est dit *spécial* s'il ne divise pas

$$(n-1)!\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right).$$

Déterminer tous les nombres spéciaux n tels que $10 \leq n \leq 100$.

OC264. Un entier est dit *adorable* s'il peut être représenté sous la forme $\frac{x^2+y^2}{x+y}$ pour deux entiers positifs distincts x, y. Un entier positif qui n'est pas adorable est dit *moche*.

1. Démontrer que 2014 est le produit d'un nombre adorable et un nombre moche.
2. Démontrer que le produit de deux nombres moches est moche.

OC265. Cinq compagnies aériennes opèrent dans un pays comprenant 36 villes. Entre toute paire de villes, exactement une compagnie aérienne opère un vol aller-retour. Si une compagnie aérienne opère entre les villes A, B puis B, C, on dit que le triplet A, B, C est proprement connecté. Déterminer la plus grande valeur possible de k telle que, quelle que soit l'organisation des vols, il y aura toujours au moins k triplets proprement connectés.