PROBLEMS

Nous invitons les lecteurs à présenter leurs solutions, commentaires et généralisations pour n'importe quel problème présenté dans cette section. De plus, nous les encourageons à soumettre des propositions de problèmes. S'il vous plaît vous référer aux règles de soumission à l'endos de la couverture ou en ligne.

Pour faciliter l'examen des solutions, nous demandons aux lecteurs de les faire parvenir au rédacteur au plus tard le **1 octobre 2016** *; toutefois, les solutions reçues après cette date seront aussi examinées jusqu'au moment de la publication.*

La rédaction souhaite remercier André Ladouceur, Ottawa, ON, d'avoir traduit les problèmes.

4071. *Proposed by Leonard Giugiuc and Daniel Sitaru.*

Prove that if $a, b, c \in (0,1)$, then $a^{a+1}b^{b+1}c^{c+1} < e^{2(a+b+c)-6}$.

4072. *Proposed by Michel Bataille.*

Let a, b be distinct positive real numbers and $A = \frac{a+b}{2}$, $G = \sqrt{ab}$, $L = \frac{a-b}{\ln a - \ln b}$. Prove that

$$\frac{L}{G} > \frac{4A+5G}{A+8G}.$$

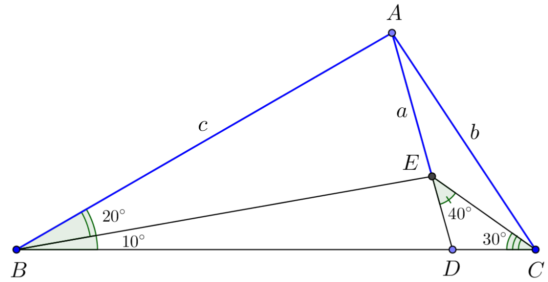
4073. *Proposed by Daniel Sitaru.*

Solve the following system :

$$\begin{cases} \sin 2x + \cos 3y = -1, \\ \sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y} + \sqrt{\cos^2 x + \cos^2 y} = 1 + \sin(x+y). \end{cases}$$

4074. *Proposed by Abdilkadir Altinaş.*

Consider the triangle ABC with the following measures :



Show that $a + b = c$; that is, $|AE| + |AC| = |AB|$.

4075. *Proposed by Leonard Giugiuc and Daniel Sitaru.*

Prove that in any triangle ABC with $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ the following inequality holds :

$$\sqrt[3]{abc} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \geq 4[ABC],$$

where $[ABC]$ is the area of triangle ABC.

4076. *Proposed by Mehtaab Sawhney.*

Prove that

$$(x^2 + y^2 + z^2)^3 \geq (x^3 + y^3 + z^3 + 3(\sqrt{3} - 1)xyz)^2$$

for all nonnegative reals x, y, and z.

4077. *Proposed by George Apostolopoulos.*

Let ABC be a triangle. Prove that

$$\sin \frac{A}{2} \cdot \sin B \cdot \sin C + \sin A \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin C + \sin A \cdot \sin B \cdot \sin \frac{C}{2} \leq \frac{9}{8}.$$

4078. *Proposed by Michel Bataille.*

Given θ such that $\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{3}$, let M_0 be a point of a circle with centre O and radius R and M_k its image under the counterclockwise rotation with centre O and angle $k\theta$. If M is the point diametrically opposite to M_0 and n is a positive integer, show that

$$\sum_{k=0}^{n} MM_k \geq (2n + 1) \cdot \frac{R}{2}.$$

4079. *Proposed by Mihaela Berindeanu.*

Let $x, y, z > 0$ and $x + y + z = 2016$. Prove that :

$$x\sqrt{\frac{yz}{y + 2015z}} + y\sqrt{\frac{xz}{z + 2015x}} + z\sqrt{\frac{xy}{x + 2015z}} \leq \frac{2016}{\sqrt{3}}.$$

4080. *Proposed by Alina Sîntămărian and Ovidiu Furdui.*

Let $a, b \in \mathbb{R}$, with $ab > 0$. Calculate

$$\int_0^{\infty} x^2 \mathrm{e}^{-\left(ax - \frac{b}{x}\right)^2} \mathrm{d}x.$$

. . . .

4071. *Proposé par Leonard Giugiuc et Daniel Sitaru.*

Soit $a, b, c \in (0,1)$. Démontrer que

$$a^{a+1}b^{b+1}c^{c+1} < e^{2(a+b+c)-6}.$$

4072. *Proposé par Michel Bataille.*

Soit a et b des réels strictement positifs distincts et soit $A = \frac{a+b}{2}$, $G = \sqrt{ab}$ et $L = \frac{a-b}{\ln a - \ln b}$. Démontrer que

$$\frac{L}{G} > \frac{4A+5G}{A+8G}.$$

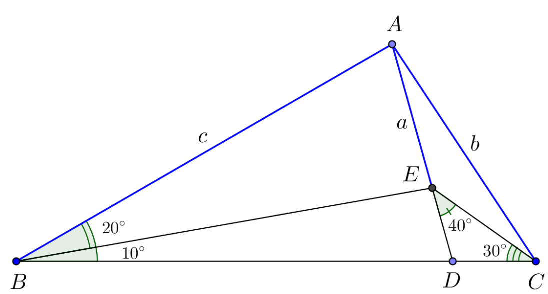
4073. *Proposé par Daniel Sitaru.*

Résoudre ce système d'équations :

$$\begin{cases} \sin 2x + \cos 3y = -1, \\ \sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y} + \sqrt{\cos^2 x + \cos^2 y} = 1 + \sin(x+y). \end{cases}$$

4074. *Proposé par Abdilkadir Altinaş.*

On considère le triangle ABC dans la figure suivante :



Démontrer que $a + b = c$.

4075. *Proposé par Leonard Giugiuc et Daniel Sitaru.*

Soit un triangle ABC avec $BC = a$, $CA = b$ et $AB = c$. Démontrer que

$$\sqrt[3]{abc} \cdot \sqrt{a^2+b^2+c^2} \geq 4[ABC],$$

$[ABC]$ étant l'aire du triangle ABC.

4076. *Proposé par Mehtaab Sawhney.*

Démontrer que pour tous réels non négatifs x, y et z,

$$(x^2+y^2+z^2)^3 \geq (x^3+y^3+z^3+3(\sqrt{3}-1)xyz)^2.$$

4077. *Proposé par George Apostolopoulos.*

Étant donné un triangle ABC, démontrer que

$$\sin\frac{A}{2}\cdot\sin B\cdot\sin C+\sin A\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin C+\sin A\cdot\sin B\cdot\sin\frac{C}{2}\leq\frac{9}{8}.$$

4078. *Proposé par Michel Bataille.*

Soit θ tel que $\frac{\pi}{3}\leq\theta\leq\frac{5\pi}{3}$, soit M_0 un point sur un cercle de centre O et de rayon R et soit M_k son image par une rotation de centre O et d'angle $k\theta$ dans le sens contraire des aiguilles d'une montre . Sachant que M est le point diamétralement opposé à M_0 et que n est un entier strictement positif, démontrer que

$$\sum_{k=0}^{n} MM_k\geq(2n+1)\cdot\frac{R}{2}.$$

4079. *Proposé par Mihaela Berindeanu.*

Soit x, y et z des réels strictement positifs tels que $x+y+z=2016$. Démontrer que

$$x\sqrt{\frac{yz}{y+2015z}}+y\sqrt{\frac{xz}{z+2015x}}+z\sqrt{\frac{xy}{x+2015z}}\leq\frac{2016}{\sqrt{3}}.$$

4080. *Proposé par Alina Sîntămărian et Ovidiu Furdui.*

Soit a et b des réels tels que $ab>0$. Déterminer la valeur de

$$\int_0^\infty x^2\mathrm{e}^{-\left(ax-\frac{b}{x}\right)^2}\mathrm{d}x.$$