

THE OLYMPIAD CORNER

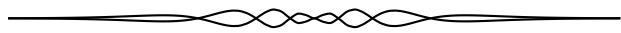
No. 336

Carmen Bruni

Les problèmes présentés dans cette section ont déjà été présentés dans le cadre d'une olympiade mathématique régionale ou nationale. Nous invitons les lecteurs à présenter leurs solutions, commentaires et généralisations pour n'importe quel problème. S'il vous plaît vous référer aux règles de soumission à l'endos de la couverture ou en ligne.

*Pour faciliter l'examen des solutions, nous demandons aux lecteurs de les faire parvenir au rédacteur au plus tard le **1 octobre 2016** ; toutefois, les solutions reçues après cette date seront aussi examinées jusqu'au moment de la publication.*

La rédaction souhaite remercier Rolland Gaudet, professeur titulaire à la retraite à l'Université de Saint-Boniface, d'avoir traduit les problèmes.



OC246. Déterminer tous les entiers positifs x , y and z tels que $x^3 = 3^y 7^z + 8$.

OC247. Soit $a_1 \leq a_2 \leq \dots$ une suite non décroissante d'entiers positifs. Un entier positif n est dit *bon* s'il existe i tel que $n = \frac{i}{a_i}$. Démontrer que si 2013 est bon, 20 l'est aussi.

OC248. Soit B et C deux points spécifiques sur un cercle centré à O , mais pas sur un même diamètre. Soit A qui bouge sur le cercle tout en étant distinct de B et C et n'appartenant pas à la bissectrice perpendiculaire de BC . Soit H l'orthocentre de $\triangle ABC$ et soit M et N les mi points des segments BC et AH respectivement. La ligne AM intersecte le cercle de nouveau à D ; enfin, NM et OC intersectent au point P . Déterminer le locus des points P au fur et à mesure que A bouge sur le cercle.

OC249. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

$$f(xf(x) + f(x)f(y) + y - 1) = f(xf(x) + xy) + y - 1.$$

OC250. Alberte et Bertrand s'amuse à un jeu de nombres. Commencant avec un entier positif n , ils prennent leur tour à modifier ce nombre, Alberte allant première. Chaque joueur change le nombre courant k à $k - 1$ ou $\lceil k/2 \rceil$. La personne qui change le nombre à 0 ou 1 gagne. Déterminer n où Alberte a une stratégie gagnante.

.....

OC246. Find all positive integers x , y and z such that $x^3 = 3^y 7^z + 8$.

OC247. Let $a_1 \leq a_2 \leq \dots$ be a non-decreasing sequence of positive integers. A positive integer n is called *good* if there is an index i such that $n = \frac{i}{a_i}$. Prove that if 2013 is good, then so is 20.

OC248. Let B and C be two fixed points on a circle centered at O that are not diametrically opposite. Let A be a variable point on the circle distinct from B and C and not belonging to the perpendicular bisector of BC . Let H be the orthocenter of $\triangle ABC$, and M and N be the midpoints of the segments BC and AH , respectively. The line AM intersects the circle again at D , and finally, NM and OD intersect at P . Determine the locus of points P as A moves around the circle.

OC249. Determine all the functions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ that satisfies the following

$$f(xf(x) + f(x)f(y) + y - 1) = f(xf(x) + xy) + y - 1.$$

OC250. Alice and Bob play a number game. Starting with a positive integer n they take turns changing the number with Alice going first. Each player may change the current number k to either $k - 1$ or $\lceil k/2 \rceil$. The person who changes 1 to 0 wins. Determine all n such that Alice has a winning strategy.

