THE OLYMPIAD CORNER

No. 336

Carmen Bruni

Les problèmes présentés dans cette section ont déjà été présentés dans le cadre d'une olympiade mathématique régionale ou nationale. Nous invitons les lecteurs à présenter leurs solutions, commentaires et généralisations pour n'importe quel problème. S'il vous plaît vous référer aux règles de soumission à l'endos de la couverture ou en ligne.

Pour faciliter l'examen des solutions, nous demandons aux lecteurs de les faire parvenir au rédacteur au plus tard le **1 octobre 2016** *; toutefois, les solutions reçues après cette date seront aussi examinées jusqu'au moment de la publication.*

La rédaction souhaite remercier Rolland Gaudet, professeur titulaire à la retraite à l'Université de Saint-Boniface, d'avoir traduit les problèmes.

OC246. Déterminer tous les entiers positifs x, y and z tels que $x^3 = 3^y 7^z + 8$.

OC247. Soit $a_1 \leq a_2 \leq \cdots$ une suite non décroissante d'entiers positifs. Un entier positif n est dit *bon* s'il existe i tel que $n = \dfrac{i}{a_i}$. Démontrer que si 2013 est bon, 20 l'est aussi.

OC248. Soit B et C deux points spécifiques sur un cercle centré à O, mais pas sur un même diamètre. Soit A qui bouge sur le cercle tout en étant distinct de B et C et n'appartenant pas à la bissectrice perpendiculaire de BC. Soit H l'orthocentre de $\triangle ABC$ et soit M et N les mi points des segments BC et AH respectivement. La ligne AM intersecte le cercle de nouveau à D ; enfin, NM et OC intersectent au point P. Déterminer le locus des points P au fur et à mesure que A bouge sur le cercle.

OC249. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$f(xf(x) + f(x)f(y) + y - 1) = f(xf(x) + xy) + y - 1.$$

OC250. Alberte et Bertrand s'amusent à un jeu de nombres. Commençant avec un entier positif n, ils prennent leur tour à modifier ce nombre, Alberte allant première. Chaque joueur change le nombre courant k à $k - 1$ ou $\lceil k/2 \rceil$. La personne qui change le nombre à 0 ou 1 gagne. Déterminer n où Alberte a une stratégie gagnante.

. . . .

OC246. Find all positive integers x, y and z such that $x^3 = 3^y 7^z + 8$.

OC247. Let $a_1 \leq a_2 \leq \cdots$ be a non-decreasing sequence of positive integers. A positive integer n is called *good* if there is an index i such that $n = \dfrac{i}{a_i}$. Prove that if 2013 is good, then so is 20.

OC248. Let B and C be two fixed points on a circle centered at O that are not diametrically opposite. Let A be a variable point on the circle distinct from B and C and not belonging to the perpendicular bisector of BC. Let H be the orthocenter of $\triangle ABC$, and M and N be the midpoints of the segments BC and AH, respectively. The line AM intersects the circle again at D, and finally, NM and OD intersect at P. Determine the locus of points P as A moves around the circle.

OC249. Determine all the functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ that satisfies the following

$$f(xf(x) + f(x)f(y) + y - 1) = f(xf(x) + xy) + y - 1.$$

OC250. Alice and Bob play a number game. Starting with a positive integer n they take turns changing the number with Alice going first. Each player may change the current number k to either $k - 1$ or $\lceil k/2 \rceil$. The person who changes 1 to 0 wins. Determine all n such that Alice has a winning strategy.