THE OLYMPIAD CORNER

No. 338

Carmen Bruni

Les problèmes présentés dans cette section ont déjà été présentés dans le cadre d'une olympiade mathématique régionale ou nationale. Nous invitons les lecteurs à présenter leurs solutions, commentaires et généralisations pour n'importe quel problème. S'il vous plaît vous référer aux règles de soumission à l'endos de la couverture ou en ligne.

Pour faciliter l'examen des solutions, nous demandons aux lecteurs de les faire parvenir au rédacteur au plus tard le **1er décembre 2016** *; toutefois, les solutions reçues après cette date seront aussi examinées jusqu'au moment de la publication.*

La rédaction souhaite remercier Rolland Gaudet, professeur titulaire à la retraite à l'Université de Saint-Boniface, d'avoir traduit les problèmes.

OC256. Démontrer qu'il existe un nombre infini d'entiers positifs n tels que le plus grand diviseur premier de $n^4 + n^2 + 1$ est égal au plus grand diviseur premier de $(n + 1)^4 + (n + 1)^2 + 1$.

OC257. Soit $ABCD$ un trapèze (i.e. un quadrilatère ayant deux côtés opposés parallèles) tel que $AB < CD$. Supposons que AC et BD se rencontrent en E, puis que AD et BC se rencontrent en F. À partir de ça, construire les parallélogrammes $AEDK$ et $BECL$. Démontrer que EF passe par le mi point du segment KL.

OC258. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tout x, $y \in \mathbb{R}$, la suivante tient

$$f(xf(y) - yf(x)) = f(xy) - xy.$$

OC259. À partir de polynômes $f(x)$ et $g(x)$ déjà inscrits dans une liste, on peut y ajouter les polynômes $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $f(g(x))$ et $cf(x)$ où c est une constante réelle arbitraire. Or les polynômes $x^3 - 3x^2 + 5$ et $x^2 - 4x$ se trouvent dans la liste. Est-il possible d'inscrire un polynôme non nul de la forme $x^n - 1$ dans un nombre fini d'étapes ?

OC260. Déterminer le maximum de

$$P = \frac{x^3y^4z^3}{(x^4 + y^4)(xy + z^2)^3} + \frac{y^3z^4x^3}{(y^4 + z^4)(yz + x^2)^3} + \frac{z^3x^4y^3}{(z^4 + x^4)(zx + y^2)^3}$$

où x, y et z sont des nombres réels positifs.

OC256. Prove that there exist infinitely many positive integers n such that the largest prime divisor of $n^4 + n^2 + 1$ is equal to the largest prime divisor of $(n+1)^4 + (n+1)^2 + 1$.

OC257. Let $ABCD$ be a trapezoid (quadrilateral with one pair of parallel sides) such that $AB < CD$. Suppose that AC and BD meet at E and AD and BC meet at F. Construct the parallelograms $AEDK$ and $BECL$. Prove that EF passes through the midpoint of the segment KL.

OC258. Determine all functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that for all x, $y \in \mathbb{R}$

$$f(xf(y) - yf(x)) = f(xy) - xy.$$

OC259. If the polynomials $f(x)$ and $g(x)$ are written on a blackboard then we can also write down the polynomials $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $f(g(x))$ and $cf(x)$, where c is an arbitrary real constant. The polynomials $x^3 - 3x^2 + 5$ and $x^2 - 4x$ are written on the blackboard. Can we write a nonzero polynomial of the form $x^n - 1$ after a finite number of steps?

OC260. Find the maximum of

$$P = \frac{x^3y^4z^3}{(x^4+y^4)(xy+z^2)^3} + \frac{y^3z^4x^3}{(y^4+z^4)(yz+x^2)^3} + \frac{z^3x^4y^3}{(z^4+x^4)(zx+y^2)^3}$$

where x, y, z are positive real numbers.