PROBLEMS

Readers are invited to submit solutions, comments and generalizations to any problem in this section. Electronic submissions are preferable, with each solution contained in a separate file. Solution files should be named using the convention LastName_FirstName_ProblemNumber *(example Doe_Jane_1234.tex). It is preferred that readers submit a LaTeX file and a pdf file for each solution, although other formats, such as Microsoft Word, are also accepted. Readers are invited to email solutions to the editor at* `crux-editors@cms.math.ca`. *Submissions by regular mail are also accepted and should be sent to the address inside the back cover. Name(s) of solver(s) with affiliation, city, and country should appear on each solution, and each solution should start on a separate page. An asterisk* ($\star$) *after a number indicates that a problem was proposed without a solution.*

Original problems are particularly sought, but other interesting problems may also be acceptable provided they are not too well known and references are given as to their provenance. Ordinarily, if the originator of a problem can be located, it should not be submitted by someone else without permission. Solutions, if known, should be sent with proposals. If a solution is not known, some reason for the existence of a solution should be included by the proposer. Proposal files should be named using the convention LastName_FirstName_Proposal_Year_number *(example Doe_Jane_Proposal_2014_4.tex, if this was Jane's fourth proposal submitted in 2014).*

To facilitate their consideration, solutions to the problems should be received by the editor by **1 September 2014**, *although solutions received after this date will also be considered until the time when a solution is published.*

Each problem is given in English and French, the official languages of Canada. In issues 1, 3, 5, 7, and 9, English will precede French, and in issues 2, 4, 6, 8, and 10, French will precede English. In the solutions' section, the problem will be stated in the language of the primary featured solution.

The editor thanks Jean-Marc Terrier of the University of Montreal for translations of the problems.

3841. *Proposed by Marcel Chiriţă, Bucharest, Romania.*

Let ABC be a triangle with $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $\angle A \leq \angle B \leq \angle C$ and $a^2 + b^2 = 2Rc$, where R is the circumradius of ABC. Determine the measure of $\angle C$.

3842. *Proposed by Jung In Lee, Seoul Science High School, Seoul, Republic of Korea.*

Let $d(n)$ be the number of positive divisors of n. For given positive integers a and b, there exist infinitely many positive integers m such that $d(a^m) \geq d(b^m)$; there also exist infinitely many positive integers n such that $d(a^n) \leq d(b^n)$. Prove that $d(a^k) = d(b^k)$ for any positive integer k.

3843. *Proposed by George Apostolopoulos, Messolonghi, Greece.*

Let a, b be distinct real numbers such that

$$a^4 + b^4 - 3(a^2 + b^2) + 8 \le 2(a + b)(2 - ab).$$

Find the value of the expression

$$A = (ab)^n + (ab + 1)^n + (ab + 2)^n,$$

where n is a positive integer.

3844. *Proposed by Michel Bataille, Rouen, France.*

Find the intersection of the surface with equation

$$(x^2 + y^2)^2 + (y^2 + z^2)^2 + (z^2 + x^2)^2 = (x + y)(y + z)(z + x)$$

with the plane $x + y + z = 2$.

3845. *Proposed by Dao Thanh Oai, Kien Xuong, Thai Binh, Viet Nam.*

Let the six points $A_1, A_2, \ldots, A_6$ lie in that order on a circle, and the six points $B_1, B_2, \ldots, B_6$ lie in that order on another circle. If the quadruples $A_i, A_{i+1}, B_{i+1}, B_i$ lie on circles with centres C_i for $i = 1, 2, \ldots, 5$, then prove that A_6, A_1, B_1, B_6 must also lie on a circle. Furthermore, if C_6 is the centre of the new circle, then prove that lines C_1C_4, C_2C_5, and C_3C_6 are concurrent.

3846. *Proposed by Arkady Alt, San Jose, CA, USA.*

Let r be a positive real number. Prove that the inequality

$$\frac{1}{1 + a + a^2} + \frac{1}{1 + b + b^2} + \frac{1}{1 + c + c^2} \ge \frac{3}{1 + r + r^2}$$

holds for any positive a, b, c such that $abc = r^3$ if and only if $r \ge 1$.

3847. *Proposed by Jung In Lee, Seoul Science High School, Seoul, Republic of Korea.*

Prove that there are no distinct positive integers a, b, c and nonnegative integer k that satisfy the conditions

$$a^{b+k} \mid b^{a+k}, \quad b^{c+k} \mid c^{b+k}, \quad c^{a+k} \mid a^{c+k}.$$

3848. *Proposed by Rudolf Fritsch, University of Munich, Munich, Germany.*

We define an altitude of the plane $(2n + 1)$-gon $A_0A_1 \ldots A_{2n}$ to be the line through vertex A_i perpendicular to the *opposite side* $A_{i-n}A_{i+n}$ (where indices are reduced modulo $2n + 1$). Prove that if $2n$ of the altitudes are concurrent, then the remaining altitude passes through the point of concurrence.

3849. *Proposed by José Luis Díaz-Barrero, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, Spain.*

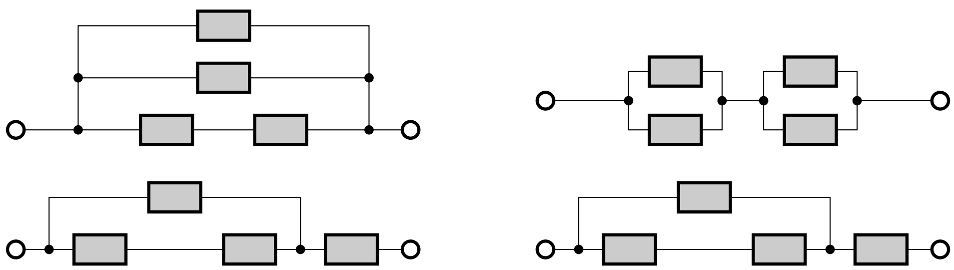
Let $A(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ be a polynomial of degree n with complex coefficients having all its zeros in the disc $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \sqrt{6}\}$. Show that

$$|A(3z)| \geq \left(\frac{2}{3}\right)^{n/2} |A(2z)|$$

for any complex number z with $|z| = 1$.

3850. *Proposed by Lee Sallows, Nijmegen, The Netherlands; Brian Trial, Ferndale, MI, USA; and Stan Wagon, Macalester College, St. Paul, MN, USA.*

Each of the four networks shown uses the same four distinct integer-valued resistors a, b, c, d, and the total resistances of the networks themselves are again a, b, c, d. Find values of a, b, c, d that work.



[*Note: The proposers solved the problem using a computer. We will accept computer aided solutions, but would be interested to see if the problem can be solved by hand.*]

3805. *Correction. Proposé par Mehmet Şahin, Ankara, Turquie.*

Soit ABC un triangle et I le centre de son cercle inscrit. Soit A' sur le rayon IA au-delà de A de sorte que $A'A = BC$. Soit B' et C' définis de manière analogue, de sorte que $B'B = CA$ et $C'C = AB$. Montrer que

$$\frac{[A'B'C']}{[ABC]} \geq (1 + \sqrt{3})^2,$$

où $[\cdot]$ désigne la surface.

3841. *Proposé par Marcel Chiriţă, Bucarest, Roumanie.*

Soit ABC un triangle avec $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $\angle A \leq \angle B \leq \angle C$ et $a^2 + b^2 = 2Rc$, où R est le rayon du cercle circonscrit de ABC. Trouver la mesure de $\angle C$.

3842. *Proposé par Jung In Lee, École Secondaire Scientifique de Séoul, Séoul, République de Corée.*

Soit $d(n)$ le nombre de diviseurs positifs de n. Pour deux entiers positifs donnés a et b, il existe une infinité d'entiers positifs m tels que $d(a^m) \geq d(b^m)$; et il existe aussi une infinité d'entiers positifs n tels que $d(a^n) \leq d(b^n)$. Montrer que $d(a^k) = d(b^k)$ pour tout entier positif k.

3843. *Proposé par George Apostolopoulos, Messolonghi, Grèce.*

Soit a, b deux nombres réels distincts tels que

$$a^4 + b^4 - 3(a^2 + b^2) + 8 \leq 2(a + b)(2 - ab).$$

Trouver la valeur de l'expression

$$A = (ab)^n + (ab + 1)^n + (ab + 2)^n,$$

où n est un entier positif.

3844. *Proposé par Michel Bataille, Rouen, France.*

Trouver l'intersection de la surface d'équation

$$(x^2 + y^2)^2 + (y^2 + z^2)^2 + (z^2 + x^2)^2 = (x + y)(y + z)(z + x)$$

avec le plan $x + y + z = 2$.

3845. *Proposé par Dao Thanh Oai, Kien Xuong, Thai Binh, Viet Nam.*

Soit $A_1, A_2, \ldots, A_6$ six points situés dans cet ordre sur un cercle et six autres points $B_1, B_2, \ldots, B_6$ situés dans cet ordre sur un autre cercle. Si les quadruplets $A_i, A_{i+1}, B_{i+1}, B_i$ sont situés sur des cercles de centres C_i pour $i = 1, 2, \ldots, 5$, montrer qu'alors A_6, A_1, B_1, B_6 doivent aussi être situés sur un cercle. De plus, si C_6 est le centre du nouveau cercle, montrer qu'alors les droites C_1C_4, C_2C_5 et C_3C_6 sont concourantes.

3846. *Proposé par Arkady Alt, San José, CA, É-U.*

Soit r un nombre réel positif. Montrer que l'inégalité

$$\frac{1}{1 + a + a^2} + \frac{1}{1 + b + b^2} + \frac{1}{1 + c + c^2} \geq \frac{3}{1 + r + r^2}$$

est satisfaite pour tout triplet positif a, b, c tel que $abc = r^3$ si et seulement si $r \geq 1$.

3847. *Proposé par Jung In Lee, École Secondaire Scientifique de Séoul, Séoul, République de Corée.*

Montrer qu'il n'existe pas trois entiers positifs distincts a, b, c et un entier non négatif k satisfaisant les conditions

$$a^{b+k} \mid b^{a+k}, \quad b^{c+k} \mid c^{b+k}, \quad c^{a+k} \mid a^{c+k}.$$

3848. *Proposé par Rudolf Fritsch, Université de Munich, Munich, Allemagne.*

On définit une hauteur dans un (2n+1)-gone plan $A_0A_1 \dots A_{2n}$ comme la droite passant par le sommet A_i et perpendiculaire au *côté opposé* $A_{i-n}A_{i+n}$ (où les indices sont réduits modulo $2n+1$). Montrer que si $2n$ des hauteurs sont concourantes, alors la hauteur restante passe par leur point d'intersection.

3849. *Proposé par José Luis Díaz-Barrero, Université Polytechnique de Catalogne, Barcelone, Espagne.*

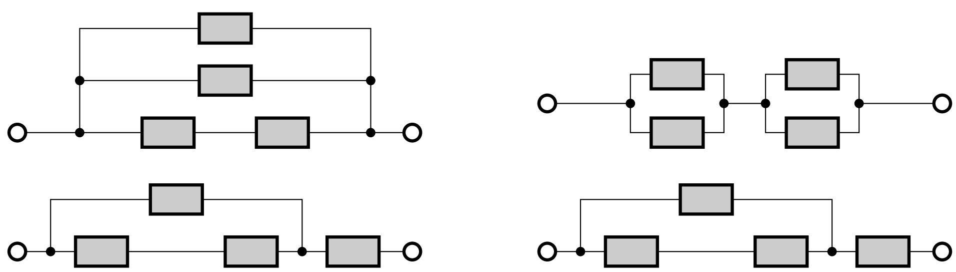
Soit $A(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ un polynôme de degré n à coefficients complexes ayant tous ses zéros dans le disque $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \sqrt{6}\}$. Montrer que

$$|A(3z)| \geq \left(\frac{2}{3}\right)^{n/2} |A(2z)|$$

pour tout nombre complexe z avec $|z| = 1$.

3850. *Proposé par Lee Sallows, Nijmegen, The Netherlands ; Brian Trial, Ferndale, MI, USA ; et Stan Wagon, Macalester College, St. Paul, MN, É-U.*

Chacun des quatre réseaux ci-dessous utilise les quatre mêmes résistances à valeurs entières a, b, c, d, et les valeurs totales des résistances des réseaux eux-mêmes sont aussi a, b, c, d. Trouver les valeurs de a, b, c, d adéquates.



[*Note : Les proposeurs ont résolu le problème en utilisant un ordinateur. Nous allons accepter des solutions assistées par ordinateur, mais nous aimerions savoir si le problème peut se résoudre indépendamment.*]