PROBLEMS

Nous invitons les lecteurs à présenter leurs solutions, commentaires et généralisations pour n'importe quel problème présenté dans cette section. De plus, nous les encourageons à soumettre des propositions de problèmes. Veuillez s'il vous plaît àcheminer vos soumissions à `crux-psol@cms.math.ca` *ou par la poste à l'adresse figurant à l'endos de la page couverture arrière. Les soumissions électroniques sont généralement préférées.*

Comment soumettre une solution. *Nous demandons aux lecteurs de présenter chaque solution dans un fichier distinct. Il est recommandé de nommer les fichiers de la manière suivante :* Nom de famille_Prénom_Numéro du problème *(exemple : Tremblay_Julie_1234.tex). De préférence, les lecteurs enverront un fichier au format LATEX et un fichier pdf pour chaque solution, bien que les autres formats soient aussi acceptés. Nous acceptons aussi les contributions par la poste. Le nom de la personne qui propose une solution doit figurer avec chaque solution, de même que l'établissement qu'elle fréquente, sa ville et son pays; chaque solution doit également commencer sur une nouvelle page.*

Comment soumettre un problème. *Nous sommes surtout à la recherche de problèmes originaux, mais d'autres problèmes intéressants peuvent aussi être acceptables pourvu qu'ils ne soient pas trop connus et que leur provenance soit indiquée. Normalement, si l'on connaît l'auteur d'un problème, on ne doit pas le proposer sans lui en demander la permission. Les solutions connues doivent accompagner les problèmes proposés. Si la solution n'est pas connue, la personne qui propose le problème doit tenter de justifier l'existence d'une solution. Il est recommandé de nommer les fichiers de la manière suivante :* Nom de famille_Prénom_Proposition_Année_numéro *(exemple : Tremblay_Julie_Proposition_2014_4.tex, s'il s'agit du 4e problème proposé par Julie en 2014).*

Pour faciliter l'examen des solutions, nous demandons aux lecteurs de les faire parvenir au rédacteur au plus tard le **1er avril 2015***; toutefois, les solutions reçues après cette date seront aussi examinées jusqu'au moment de la publication.*

Chaque problème est présenté en anglais et en français, les deux langues officielles du Canada. Dans les numéros 1, 3, 5, 7 et 9, l'anglais précédera le français, et dans les numéros 2, 4, 6, 8 et 10, le français précédera l'anglais. Dans la section Solutions, le problème sera écrit dans la langue de la première solution présentée.

La rédaction remercie André Ladouceur, Ottawa, ON, d'avoir traduit les problèmes.

3891. *Proposé par Michel Bataille.*

Soit ABC un triangle qui n'est ni équilatéral, ni rectangle et soit O le centre de son cercle circonscrit. Les hauteurs issues des sommets A, B et C coupent le cercle de nouveau aux points respectifs A', B' et C'. Soit U, V et W les centres respectifs des cercles circonscrits aux triangles OBC, OCA et OAB. Démontrer que UA', VB' et WC' sont concourants et identifier leur point commun.

3892. *Proposé par George Apostolopoulos.*

Soit a, b et c les longueurs des côtés d'un triangle ABC. Soit R le rayon du cercle circonscrit au triangle et r le rayon du cercle inscrit dans le triangle. Démontrer

que
$$\frac{R}{r} \geq \frac{2}{3}(\cos A + \cos B + \cos C) + \frac{a^3+b^3+c^3}{3abc}.$$

3893. *Proposé par Ovidiu Furdui.*

Soit n un entier supérieur ou égal à 1. La partie décimale $\{a\}$ d'un nombre réel a est définie par l'expression $\{a\} = a - \lfloor a \rfloor$. Évaluer
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \left\{\ln^{2n-1} \tan x\right\} \mathrm{d}x.$$

3894. *Proposé par Paul Bracken.*

a) Démontrer que pour tout n, $n \in \mathbb{N}$, on a
$$1 + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k)^3 - 3k} = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k+n}.$$

b) Évaluer la limite du membre de droite de l'équation de la partie a) lorsque $n \to \infty$ et l'exprimer par une formule de forme fermée.

3895. *Proposé par Neculai Stanciu et Titu Zvonaru.*

Soit ABC un triangle acutangle tel que $AB \neq AC$. Soit A' le pied de la hauteur issue du sommet A. La bissectrice de l'angle A coupe BC en D et le cercle circonscrit au triangle en M. Étant donné un point T sur le segment AD, soit P et N les projections respectives de T sur AA' et BC. Démontrer que si M, N et P sont alignés, alors T est le centre du cercle inscrit dans le triangle.

3896. *Proposé par Dao Thanh Oai et Nguyen Minh Ha.*

Soit $[WXYZ]$ l'aire algébrique du quadrilatère $WXYZ$ (W, X, Y et Z étant n'importe quels points du plan), c'est-à-dire la moitié de l'aire algébrique du parallélogramme formé par les vecteurs $\overrightarrow{WY}$ et $\overrightarrow{XZ}$:
$$[WXYZ] = \frac{1}{2}|\overrightarrow{WY}||\overrightarrow{XZ}| \sin(\overrightarrow{WY}, \overrightarrow{XZ}).$$

Soit $A_1A_2 \dots A_{2n}$ et $B_1B_2 \dots B_{2n}$ deux $2n$-gones réguliers ayant la même orientation dans un plan. Démontrer que $[A_iA_{i+1}B_{i+1}B_i] + [A_{n+i}A_{n+i+1}B_{n+i+1}B_{n+i}]$ est une constante pour n'importe quel i, $1 \leq i \leq 2n$, les indices étant réduits modulo $2n$.

3897. *Proposé par Yakub Aliyev.*

Soit BB_1 et CC_1 deux céviennes du triangle ABC qui se coupent au point O. On considère une droite passant au point O et qui coupe le segment BC_1 en X et le segment B_1C en Y. Démontrer que

$$\frac{|BX|}{|XC_1|} > \frac{|B_1Y|}{|YC|}.$$

3898. *Proposé par Dragoljub Milošević.*

Soit un pentagone régulier $ABCDE$. On place les points F et G sur le prolongement du côté AB du pentagone, dans l'ordre F, A, B, G, de manière que $AG = BF = AC$. Comparer l'aire du triangle FGD à celle du pentagone $ABCDE$.

3899. *Proposé par George Apostolopoulos.*

Soit a, b et c des réels strictement positifs tels que $a + b + c = 3$. Démontrer que

$$\left(\frac{a^3+1}{a^2+1}\right)^2 + \left(\frac{b^3+1}{b^2+1}\right)^2 + \left(\frac{c^3+1}{c^2+1}\right)^2 \geq ab + bc + ca.$$

Quand y a-t-il égalité ?

3900. *Proposé par Abdilkadir Altintaş et Halit Çelik.*

Dans un triangle ABC, on a $AB = AC$ et $m(BAC) = 20°$. D est le point sur AC tel que $m(DBC) = 25°$ et E est le point sur AB tel que $m(BCE) = 65°$. Déterminer la mesure de l'angle CED.

. . . .

3891. *Proposed by Michel Bataille.*

Let ABC be a triangle that is neither equilateral nor right-angled and let O be its circumcentre. Let the altitudes from A, B and C meet the circumcircle again at A', B' and C', respectively. If U, V and W denote the circumcentres of triangles OBC, OCA and OAB, respectively, prove that the lines UA', VB' and WC' are concurrent and identify their common point.

3892. *Proposed by George Apostolopoulos.*

Let a, b and c be the lengths of the sides of a triangle ABC with circumradius R and inradius r. Prove that

$$\frac{R}{r} \geq \frac{2}{3}(\cos A + \cos B + \cos C) + \frac{a^3+b^3+c^3}{3abc}.$$

3893. *Proposed by Ovidiu Furdui.*

Let $n \geq 1$ be an integer and let the decimal part of a real number a be defined by $\{a\} = a - \lfloor a \rfloor$. Evaluate

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \left\{ \ln^{2n-1} \tan x \right\} \mathrm{d}x.$$

3894. *Proposed by Paul Bracken.*

a) Prove that for $n \in \mathbb{N}$,

$$1 + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k)^3 - 3k} = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k+n}.$$

b) For the equation in part a), evaluate the limit of the right-hand side as $n \to \infty$ and compute the sum in closed form.

3895. *Proposed by Neculai Stanciu and Titu Zvonaru.*

In the acute triangle ABC with $AB \neq AC$, let A' be the foot of the altitude from A, and let the bisector of the angle at A meet BC at D and the circumcircle at M. Finally, for a point T on the segment AD, let P and N be its projections on AA' and BC, respectively. Prove that if M, N, and P are collinear, then T is the incentre of the triangle.

3896. *Proposed by Dao Thanh Oai and Nguyen Minh Ha.*

Let $[WXYZ]$ represent the signed area of the quadrilateral $WXYZ$ (where W, X, Y, Z can be any four points in the plane), namely half the signed area of the parallelogram formed by the vectors $\overrightarrow{WY}$ and $\overrightarrow{XZ}$:

$$[WXYZ] = \frac{1}{2}|\overrightarrow{WY}||\overrightarrow{XZ}|\sin(\overrightarrow{WY}, \overrightarrow{XZ}).$$

If $A_1A_2 \ldots A_{2n}$ and $B_1B_2 \ldots B_{2n}$ are two similarly oriented regular $2n$-gons in the plane, prove that $[A_iA_{i+1}B_{i+1}B_i] + [A_{n+i}A_{n+i+1}B_{n+i+1}B_{n+i}]$ is constant for any i, $1 \leq i \leq 2n$, where the indices are reduced modulo $2n$.

3897. *Proposed by Yakub Aliyev.*

Let the cevians BB_1 and CC_1 of a triangle ABC intersect at the point O. Prove that if a line is drawn through O meeting line segment BC_1 at X and line segment B_1C at Y, then

$$\frac{|BX|}{|XC_1|} > \frac{|B_1Y|}{|YC|}.$$

3898. *Proposed by Dragoljub Milošević.*

On the extension of the side AB of the regular pentagon $ABCDE$, let the points F and G be placed in the order F, A, B, G so that $AG = BF = AC$. Compare the area of triangle FGD to the area of pentagon $ABCDE$.

3899. *Proposed by George Apostolopoulos.*

Let a, b and c be positive real numbers such that $a + b + c = 3$. Prove that

$$\left(\frac{a^3+1}{a^2+1}\right)^2 + \left(\frac{b^3+1}{b^2+1}\right)^2 + \left(\frac{c^3+1}{c^2+1}\right)^2 \geq ab + bc + ca.$$

When does equality hold?

3900. *Proposed by Abdilkadir Altintaş and Halit Çelik.*

In a triangle ABC, $AB = AC$, $m(BAC) = 20°$, D is the point on AC such that $m(DBC) = 25°$ and E is the point on AB such that $m(BCE) = 65°$. Find the measure of the angle CED.