THE OLYMPIAD CORNER

No. 318

Nicolae Strungaru

Les problèmes présentés dans cette section ont déjà été présentés dans le cadre d'une olympiade mathématique régionale ou nationale. Nous invitons les lecteurs à présenter leurs solutions, commentaires et généralisations pour n'importe quel problème. Veuillez s'il vous plaît àcheminer vos soumissions à crux-olympiad@cms.math.ca *ou par la poste à l'adresse figurant à l'endos de la page couverture arrière. Les soumissions électroniques sont généralement préférées.*

Comment soumettre une solution. *Nous demandons aux lecteurs de présenter chaque solution dans un fichier distinct. Il est recommandé de nommer les fichiers de la manière suivante :* Nom de famille_Prénom_Numéro du problème *(exemple : Tremblay_Julie_1234.tex). De préférence, les lecteurs enverront un fichier au format LaTeX et un fichier pdf pour chaque solution, bien que les autres formats soient aussi acceptés. Nous acceptons aussi les contributions par la poste. Le nom de la personne qui propose une solution doit figurer avec chaque solution, de même que l'établissement qu'elle fréquente, sa ville et son pays ; chaque solution doit également commencer sur une nouvelle page.*

Pour faciliter l'examen des solutions, nous demandons aux lecteurs de les faire parvenir au rédacteur au plus tard le **1er avril 2015** *; toutefois, les solutions reçues après cette date seront aussi examinées jusqu'au moment de la publication.*

Chaque problème est présenté en anglais et en français, les deux langues officielles du Canada. Dans les numéros 1, 3, 5, 7 et 9, l'anglais précédera le français, et dans les numéros 2, 4, 6, 8 et 10, le franais précédera l'anglais. Dans la section Solutions, le problème sera écrit dans la langue de la première solution présentée.

La rédaction souhaite remercier d'avoir traduit les problèmes.

OC156. Soit $ABCD$ un tétraèdre. Démontrer que le sommet D, le centre de la sphère inscrite et le centroïde de $ABCD$ sont colinéaires si et seulement si les surfaces des triangles ABD, BCD et CAD sont égales.

OC157. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$f(f(x)^2 + f(y)) = xf(x) + y, \ \forall x, y \in \mathbb{R}\,.$$

OC158. Démonter qu'un graphe fini, simple et planaire possède une orientation telle que tout sommet ait un degré extérieur au plus égal à 3.

OC159. Soit p un nombre premier impair. Démontrer qu'il existe un nombre naturel x tel que x et $4x$ sont toutes deux des racines primitives modulo p.

OC160. Le cercle inscrit du triangle ABC est tangent aux côtés BC, CA et AB à D, E et F respectivement. Soit T la réflexion de F par rapport à B et soit S la réflexion de E par rapport à C. Démontrer que le centre du cercle inscrit du triangle AST est à l'intérieur ou sur le cercle inscrit du triangle ABC.

. . . .

OC156. Let $ABCD$ be a tetrahedron. Prove that the vertex D, the center of the insphere and the centroid of $ABCD$ are collinear if and only if the areas of triangles ABD, BCD and CAD are equal.

OC157. Find all functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such that

$$f(f(x)^2 + f(y)) = xf(x) + y, \ \forall x, y \in \mathbb{R}\,.$$

OC158. Prove that a finite simple planar graph has an orientation so that every vertex has out-degree at most 3.

OC159. Let p be an odd prime number. Prove that there exists a natural number x such that x and $4x$ are both primitive roots modulo p.

OC160. The incircle of triangle ABC is tangent to sides BC, CA and AB at D, E respectively F. Let T be the reflection of F with respect to B and S the reflection of E with respect to C. Prove that the incenter of triangle AST is inside or on the incircle of triangle ABC.