THE CONTEST CORNER

No. 20

Robert Bilinski and Kseniya Garaschuk

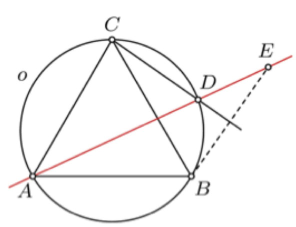
Les problèmes présentés dans cette section ont déjà été présentés dans le cadre d'un concours mathématique de niveau secondaire ou de premier cycle universitaire, ou en ont été inspirés. Nous invitons les lecteurs à présenter leurs solutions, commentaires et généralisations pour n'importe quel problème. Veuillez s'il vous plaît àcheminer vos soumissions à `crux-contest@cms.math.ca` *ou par la poste à l'adresse figurant à l'endos de la page couverture arrière. Les soumissions électroniques sont généralement préférées.*

Comment soumettre une solution. *Nous demandons aux lecteurs de présenter chaque solution dans un fichier distinct. Il est recommandé de nommer les fichiers de la manière suivante :* Nom de famille_Prénom_Numéro du problème *(exemple : Tremblay_Julie_1234.tex). De préférence, les lecteurs enverront un fichier au format LaTeX et un fichier pdf pour chaque solution, bien que les autres formats soient aussi acceptés. Nous acceptons aussi les contributions par la poste. Le nom de la personne qui propose une solution doit figurer avec chaque solution, de même que l'établissement qu'elle fréquente, sa ville et son pays ; chaque solution doit également commencer sur une nouvelle page.*

Pour faciliter l'examen des solutions, nous demandons aux lecteurs de les faire parvenir au rédacteur au plus tard le **1er avril 2015** *; toutefois, les solutions reçues après cette date seront aussi examinées jusqu'au moment de la publication.*

Chaque problème est présenté en anglais et en français, les deux langues officielles du Canada. Dans les numéros 1, 3, 5, 7 et 9, l'anglais précédera le français, et dans les numéros 2, 4, 6, 8 et 10, le franais précédera l'anglais. Dans la section Solutions, le problème sera écrit dans la langue de la première solution présentée.

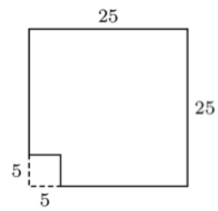
CC96. Un triangle équilatéral ABC est inscrit dans un cercle o. Le point D est sur l'arc BC de o. Le point E est le symétrique de B par rapport à CD. Prouver que A, D et E sont alignés.



CC97. Trouver la plus petite valeur de l'expression $a + b^3$ où a et b sont des nombres positifs dont le produit vaut 1.

CC98. Existe-t-il des nombres réels x et y pour lesquels $\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1} = x + y$?

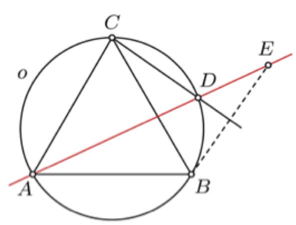
CC99. Si on enlève un carré de côté 5 du coin d'un carré de côté 25, peut-on découper la partie restante en 100 rectangles de dimension soit 1×6 ou 2×3 ?



CC100. Six équipes participent à un tournoi où chaque équipe joue avec chaque autre exactement un match. Une victoire vaut 3 point alors qu'un match nul en vaut 1 et une défaite donne zéro point. Après le tournoi, on remarque que la somme des points marqués par toutes les équipes est 41. Prouver qu'il y a quatre équipes, dont chacune a au moins un match nul.

. . . .

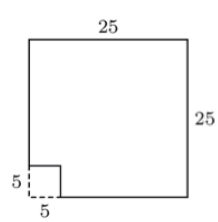
CC96. An equilateral triangle ABC is inscribed in a circle o. Point D is on arc BC of o. Point E is the symmetric of B with respect to line CD. Prove that A, D and E are collinear.



CC97. Find the smallest value of the expression $a+b^3$ where a and b are positive numbers whose product is 1.

CC98. Are there real numbers x and y such that $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1} = x+y$?

CC99. We cut off a square of side 5 from the corner of a square of side 25. Can we cut the remaining part into 100 rectangles of dimension either 1×6 or 2×3 ?



CC100. In a 6 team tournament, each team played with each other team exactly once. A team gets 3 points for a victory, 1 point for a draw and 0 for a defeat. After the tournament, the sum of the scores by all the teams is 41. Prove that the exists a group of 4 teams where each team tied at least once.

CONTEST CORNER SOLUTIONS

CC46. Starting with the input (m, n), Machine A gives the output (n, m). Starting with the input (m, n), Machine B gives the output $(m + 3n, n)$. Starting with the input (m, n), Machine C gives the output $(m - 2n, n)$. Natalie starts with the pair $(0, 1)$ and inputs it into one of the machines. She takes the output and inputs it into any one of the machines. She continues to take the output that she receives and inputs it into any one of the machines. (For example, starting with $(0, 1)$, she could use machines B, B, A, C, B in that order to obtain the output $(7, 6)$.) Is it possible for her to obtain $(20132013, 20142014)$ after repeating this process any number of times?

This problem was inspired by 2009 Fermat Contest, number 24.

Solved by G. Geupel; R. Hess; and S. Muralidharan. We present the solution by S. Muralidharan.

For any machine M and input (x, y) let us write $M(x, y)$ for the output. Given that

$$A(m, n) = (n, m)$$

$$B(m, n) = (m + 3n, n)$$

$$C(m, n) = (m - 2n, n)$$

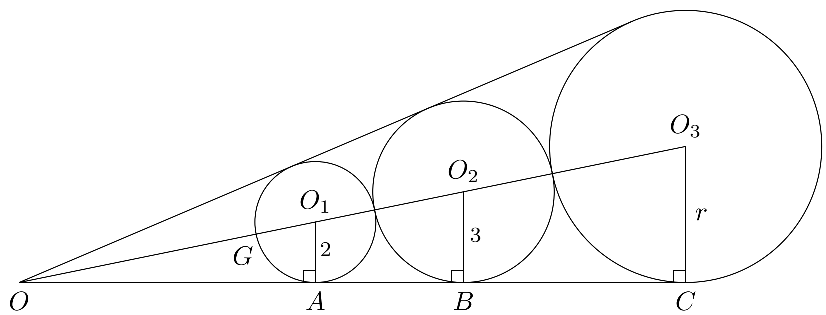
we clearly have $GCD(M(m, n)) = GCD(m, n)$ for any machine $M = A, B, C$ and any pair of integers (where GCD denotes the greatest common divisor). Since $GCD(0, 1) = 1$ and $GCD(20132013, 20142014) = 10001$, it follows that Natalie can not obtain $(20132013, 20142014)$ starting with $(0, 1)$.

CC47. A circle of radius 2 is tangent to both sides of an angle. A circle of radius 3 is tangent to the first circle and both sides of the angle. A third circle is tangent to the second circle and both sides of the angle. Find the radius of the third circle.

Originally 2005 W.J. Blundon Contest, problem 10.

Solved by Š. Arslanagić ; M. Bataille ; M. Coiculescu ; M. Amengual Covas ; G. Geupel ; J. G. Heuver ; S. Muralidharan ; and T. Zvonaru. We present solution by Matei Coiculescu with figure by Miguel Amengual Covas.

Denote by R the radius of the third circle. Let O be the vertex of the angle and let O_1, O_2 and O_3 be the centres of the respective circles with points of tangency A, B and C, respectively. The bisector OO_3 passes through the centres of the circles and intersects the circle with radius 2 at G. We denote the length OG by x.



It is easily seen that $\Delta OAO_1 \sim \Delta OBO_2 \sim \Delta OCO_3$. Thus $\frac{2}{3} = \frac{2+x}{7+x}$, or $x = 8$. Then $\frac{3}{r} = \frac{15}{18+r}$, which gives us $r = 4.5$.

CC48. Determine whether there exist two real numbers a and b such that both $(x-a)^3 + (x-b)^2 + x$ and $(x-b)^3 + (x-a)^2 + x$ contain only real roots.

Originally 2012 Sun Life Financial Repéchage Competition, problem 6.

Solved by M. Bataille ; R. Hess ; S. Muralidharan ; P. Perfetti ; and T. Zvonaru. We give a composite solution.

Suppose $(x-a)^3 + (x-b)^2 + x = x^3 - (3a-1)x^2 + (3a^2 - 2b + 1)x - (a^3 - b^2)$ has only real roots. Let r, s, t be these roots. Then

$$(x-r)(x-s)(x-t) = x^3 - (3a-1)x^2 + (3a^2 - 2b + 1)x - (a^3 - b^2).$$

Comparing coefficients we have

$$r + s + t = 3a - 1, \quad rs + st + tr = 3a^2 - 2b + 1.$$

Now observe that

$$\begin{aligned}(r+s+t)^2 &= r^2 + s^2 + t^2 + 2(rs + st + tr) \\ &= \left(\frac{r^2+s^2}{2} + \frac{s^2+t^2}{2} + \frac{t^2+r^2}{2}\right) + 2(rs + st + tr) \\ &\geq (rs + st + tr) + 2(rs + st + tr) \\ &= 3(rs + st + tr).\end{aligned}$$

Therefore,

$$(3a-1)^2 \geq 3(3a^2-2b+1).$$

Rearranging this we get $6a-6b \leq -2$. Similarly, since $(x-b)^3+(x-a)^2+x$ has only real roots, $6b-6a \leq -2$. Adding these two inequalities we deduce $0 \leq -4$, a contradiction. Thus it is impossible for the two given polynomials to have only real roots.

Editor's Comment : Many submitted solutions involved analyzing the derivatives of the cubics.

CC49. Coins are placed on some of the 100 squares in a 10×10 grid. Every square is next to another square with a coin. Find the minimum possible number of coins. (We say that two squares are next to each other when they share a common edge but are not equal).

Originally 2009 University of Waterloo Big E Contest, Question 4.

One solution was received, which managed to place 34 coins on the board, which is not the minimum possible number.

CC50. Show that the square root of a natural number of five or fewer digits never has a decimal part starting 0.1111, but that there is an eight-digit number with this property.

Originally 2005 APICS Math Competition, Question 7.

One incorrect solution was received.