PROBLEMS

*Solutions to problems in this issue should arrive no later than **1 March 2014**. An asterisk ($\star$) after a number indicates that a problem was proposed without a solution.*

Each problem is given in English and French, the official languages of Canada. In issues 1, 3, 5, 7, and 9, English will precede French, and in issues 2, 4, 6, 8, and 10, French will precede English. In the solutions' section, the problem will be stated in the language of the primary featured solution.

The editor thanks Jean-Marc Terrier of the University of Montreal for translations of the problems.

3781. *Proposed by Marcel Chiriţă, Bucharest, Romania.*

Solve the equation
$$3^{1-x} + 3^{\sqrt{3x-2x^2}} = 4\,.$$

3782. *Proposed by Edward T.H. Wang, Wilfrid Laurier University, Waterloo, ON; and Billy Jin, student, Waterloo Collegiate, Waterloo, ON.*

For $n \in \mathbb{N}$, let $S = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. For each nonempty $T \subseteq S$ define the "drop" of T by $d(T) = f(T) - g(T)$ where $f(T)$ and $g(T)$ denote the maximum and minimum elements of T, respectively. (e.g., $d(\{2\}) = 0$, $d(\{2,3,7\}) = 5$) Evaluate $D_n = \sum d(T)$, the total of the drops of S, where the summation is over all non-empty subsets T of S.

3783. *Proposed by George Apostolopoulos, Messolonghi, Greece.*

Let a, b, c be positive real numbers. Prove that
$$(3a^2+2)\frac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2} + (3b^2+2)\frac{b^3+c^3}{b^2+bc+c^2} + (3c^2+2)\frac{c^3+a^3}{c^2+ca+a^2} \geq 10abc\,.$$

3784. *Proposed by Constantin Mateescu, "Zinca Golescu" National College, Pitesti, Romania.*

Let ABC be a triangle with circumradius R, inradius r and semiperimeter s for which we denote $Q = \sum\limits_{\text{cyclic}} \cos\left(\frac{A}{2}\right)$. Prove that
$$s = 2Q\left(\sqrt{R^2Q^2 - Rr} - 2R\right)\ .$$

3785. *Proposed by Václav Konečný, Big Rapids, MI, USA.*

Consider an ellipse $\mathcal{E}$ given by the equation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ with $a > b$. Find the coordinates, in the first quadrant, of the point P on $\mathcal{E}$ such that the acute angle θ between the tangent t to $\mathcal{E}$ at P and the line OP is minimized.

3786. *Proposed by Mehmet Şahin, Ankara, Turkey.*

Let ABC be a triangle with medians m_a, m_b and m_c, circumradius R and inradius r. Let P be the point of intersection of the bisector of $\angle A$ and the median from B, Q be the point of intersection of the bisector of $\angle B$ and the median from C, and R be the point of intersection of the bisector of $\angle C$ and the median from A. If $\angle APB = \alpha$, $\angle BQC = \beta$ and $\angle CRA = \gamma$, prove that

$$\frac{m_a m_b m_c \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma}{(a+2b)(b+2c)(c+2a)} = \frac{r}{32R} \ .$$

3787. *Proposed by Michel Bataille, Rouen, France.*

Let S be a finite set with cardinality $|S| = n \geq 1$ and let k be a positive integer. Calculate

$$\sum_{(A)} |A(1) \cap A(2) \cap \cdots \cap A(k)| \ \text{ and } \ \sum_{(A)} |A(1) \cup A(2) \cup \cdots \cup A(k)|$$

where the summation $\sum\limits_{(A)}$ is over all mappings A from $\{1, 2, \ldots, k\}$ to the power set $\mathcal{P}(S)$.

3788. *Proposed by Panagiote Ligouras, Leonardo da Vinci High School, Noci, Italy.*

Let a, b and c be the sides of an acute-angled triangle ABC. Let H be the orthocentre, and let d_a, d_b and d_c be the distances from H to the sides BC, CA and AB, respectively. Prove that

$$\sum_{\text{cyclic}} \sqrt{\frac{1}{a^2b^2} + \frac{1}{b^2c^2} - \frac{1}{c^2a^2}} \leq \frac{9}{4(d_a+d_b+d_c)^2} \ .$$

3789. *Proposed by Michel Bataille, Rouen, France.*

Let triangle ABC be inscribed in a circle with centre O and radius R and P be any point in its plane. Let P' be such that $\Delta PBP'$ is directly similar to ΔCOA and P'' be the reflection of P in AC. Prove that

$$P'P'' \geq \frac{2F}{R}$$

where F is the area of ΔABC. For which P does equality hold?

3790. *Proposed by Ovidiu Furdui, Campia Turzii, Cluj, Romania.*

Let $a, \alpha \geq 0$ be nonnegative real numbers and let β be a positive number. Determine the limit

$$L(\alpha, \beta) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^\alpha}{(n^2+kn+a)^\beta} \ .$$

. . . .

3781. *Proposé par Marcel Chiriţă, Bucharest, Romania.*

Résoudre l'équation

$$3^{1-x} + 3^{\sqrt{3x-2x^2}} = 4\,.$$

3782. *Proposé par Edward T.H. Wang, Université Wilfrid Laurier, Waterloo, ON; et Billy Jin, étudiant, Waterloo Collegiate, Waterloo, ON.*

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $S = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Pour tout sous-ensemble non vide $T \subseteq S$, définissons la "chute" de T par $d(T) = f(T) - g(T)$ où $f(T)$ et $g(T)$ dénotent respectivement les éléments maximal et minimal de T. (p. ex, $d(\{2\}) = 0$, $d(\{2, 3, 7\}) = 5$). Evaluer $D_n = \sum d(T)$, le total des chutes de S, où la sommation s'étant sur tous les sous-ensembles non vides T de S.

3783. *Proposé par George Apostolopoulos, Messolonghi, Grèce.*

Soit a, b, c trois nombres réels positifs. Montrer que

$$(3a^2+2)\frac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2} + (3b^2+2)\frac{b^3+c^3}{b^2+bc+c^2} + (3c^2+2)\frac{c^3+a^3}{c^2+ca+a^2} \geq 10abc\,.$$

3784. *Proposé par Constantin Mateescu, "Zinca Golescu" Collège National, Pitesti, Roumanie.*

Soit respectivement R, r et s le rayon du cercle circonscrit, celui du cercle inscrit et le demi-périmètre d'un triangle ABC et soit $Q = \sum\limits_{\text{cyclique}} \cos\left(\frac{A}{2}\right)$. Montrer que

$$s = 2Q\left(\sqrt{R^2Q^2 - Rr} - 2R\right)\ .$$

3785. *Proposé par Václav Konečný, Big Rapids, MI, É-U.*

On donne une ellipse $\mathcal{E}$ d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a > b$. Trouver, dans le premier quadrant, les coordonnées du point P sur $\mathcal{E}$ rendant minimal l'angle aigu θ entre la tangente t à $\mathcal{E}$ en P et la droite OP.

3786. *Proposé par Mehmet Şahin, Ankara, Turquie.*

Soit m_a, m_b et m_c les médianes d'un triangle ABC et respectivement R et r les rayons des cercles circonscrit et inscrit. Soit respectivement P le point d'intersection de la bissectrice de $\angle A$ et de la médiane issue de B, Q celui de la bissectrice de $\angle B$ et de la médiane issue de C, et R celui de la bissectrice de $\angle C$ et de la médiane issue de A. Si $\angle APB = \alpha$, $\angle BQC = \beta$ et $\angle CRA = \gamma$, montrer que

$$\frac{m_a m_b m_c \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma}{(a+2b)(b+2c)(c+2a)} = \frac{r}{32R}\ .$$

3787. *Proposé par Michel Bataille, Rouen, France.*

Soit S un ensemble fini de cardinalité $|S| = n \geq 1$ et soit k un entier positif. Calculer

$$\sum_{(A)} |A(1) \cap A(2) \cap \cdots \cap A(k)| \text{ et } \sum_{(A)} |A(1) \cup A(2) \cup \cdots \cup A(k)|$$

où la sommation $\sum_{(A)}$ porte sur toutes les applications A de $\{1, 2, \ldots, k\}$ dans l'ensemble des parties de S, $\mathcal{P}(S)$.

3788. *Proposé par Panagiote Ligouras, École Secondaire Léonard de Vinci, Noci, Italie.*

Soit a, b et c les côtés d'un triangle acutangle ABC. Soit H son orthocentre, et d_a, d_b et d_c les distances respectives de H aux côtés BC, CA et AB. Montrer que

$$\sum_{\text{cyclique}} \sqrt{\frac{1}{a^2b^2} + \frac{1}{b^2c^2} - \frac{1}{c^2a^2}} \leq \frac{9}{4(d_a + d_b + d_c)^2} \ .$$

3789. *Proposé par Michel Bataille, Rouen, France.*

On considère un point quelconque P dans le plan d'un cercle de centre O et de rayon R contenant un triangle ABC. Soit P' un point tel que $\Delta PBP'$ est directement semblable à ΔCOA et soit P'' la réflexion de P par rapport à AC. Montrer que

$$P'P'' \geq \frac{2F}{R}$$

où F désigne l'aire de ΔABC. Pour quel P a-t-on égalité ?

3790. *Proposé par Ovidiu Furdui, Campia Turzii, Cluj, Roumanie.*

Soit $a, \alpha \geq 0$ deux nombres réels non négatifs et soit β un nombre positif. Calculer la limite

$$L(\alpha, \beta) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^\alpha}{(n^2 + kn + a)^\beta} \ .$$