

THE CONTEST CORNER

No. 9

Shawn Godin

The Contest Corner is a new feature of *CruX Mathematicorum*. It will be filling the gap left by the movement of Mathematical Mayhem and Skoliad to a new on-line journal in 2013. The column can be thought of as a hybrid of Skoliad, The Olympiad Corner and the old Academy Corner from several years back. The problems featured will be from high school and undergraduate mathematics contests with readers invited to submit solutions. Readers' solutions will begin to appear in the next volume.

Solutions can be sent to:

Shawn Godin
Cairine Wilson S.S.
975 Orleans Blvd.
Orleans, ON, CANADA
K1C 2Z5

or by email to

cruX-contest@cms.math.ca.

The solutions to the problems are due to the editor by **1 March 2014**.

Each problem is given in English and French, the official languages of Canada. In issues 1, 3, 5, 7, and 9, English will precede French, and in issues 2, 4, 6, 8, and 10, French will precede English. In the solutions' section, the problem will be stated in the language of the primary featured solution.

The editor thanks André Ladouceur, Ottawa, ON, for translating the problems from English into French.

CC41. Ace runs with constant speed and Flash runs x times as fast, $x > 1$. Flash gives Ace a head start of y metres, and, at a given signal, they start off in the same direction. Find the distance Flash must run to catch Ace.

CC42. $\triangle ABC$ has its vertices on a circle of radius r . If the lengths of two of the medians of $\triangle ABC$ are equal to r , determine the side lengths of $\triangle ABC$.

CC43. A circle has diameter AB . P is a fixed point of AB lying between A and B . A point X , distinct from A and B , lies on the circumference of the circle. Prove that $\tan(\angle AXP) \div \tan(\angle XAP)$ is constant for all values of X .

CC44. Let $a_0 = 1$ and for $n \geq 0$ let $a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2}a_n^2$. Find $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n$, if it exists.

CC45. The *baseball sum* of two rational numbers $\frac{a}{b}$ and $\frac{c}{d}$ is defined to be $\frac{a+c}{b+d}$. Starting with the rational numbers $\frac{0}{1}$ and $\frac{1}{1}$ as Stage 0, the baseball sum of each consecutive pair of rational numbers in a stage is inserted between the pair to arrive at the next stage. The first few stages of this process are shown below:

STAGE 0:	$\frac{0}{1}$							$\frac{1}{1}$	
STAGE 1:	$\frac{0}{1}$			$\frac{1}{2}$				$\frac{1}{1}$	
STAGE 2:	$\frac{0}{1}$		$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$		$\frac{1}{1}$	
STAGE 3:	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{1}$

Prove that:

- (i) no rational number will be inserted more than once,
- (ii) no inserted fraction is reducible, and
- (iii) every rational number between 0 and 1 will be inserted in the pattern at some stage.

.....

CC41. Laffèche court à une vitesse constante et Leclair court x fois plus vite, $x > 1$. Leclair donne une longueur d’avance de y mètres à Laffèche puis, au signal, les deux partent dans la même direction. Déterminer la distance que Leclair doit parcourir pour rattraper Laffèche.

CC42. Les sommets du triangle ABC sont situés sur un cercle de rayon r . Sachant que le triangle ABC a deux médianes de longueur r , déterminer la longueur de chacun des côtés du triangle ABC .

CC43. On considère un cercle de diamètre AB . P est un point fixe sur ce diamètre, autre que A et B . X est un point sur le cercle, autre que A et B . Démontrer que $\tan(\angle AXP) \div \tan(\angle XAP)$ est une constante, quelle que soit la position de X .

CC44. Soit $a_0 = 1$. Lorsque $n \geq 0$, soit $a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2}a_n^2$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n$ si elle existe.

CC45. La *somme naïve* de deux nombres rationnels, $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$, est le nombre $\frac{a+c}{b+d}$. À l’étape 0, on écrit les nombres rationnels $\frac{0}{1}$ et $\frac{1}{1}$. Pour atteindre l’étape suivante, on considère chaque paire de fractions consécutives de l’étape précédente et on insère entre elles la somme naïve de ces deux fractions. Les premières étapes de ce processus sont indiquées ci-dessous :

ÉTAPE 0 :	$\frac{0}{1}$							$\frac{1}{1}$	
ÉTAPE 1 :	$\frac{0}{1}$			$\frac{1}{2}$				$\frac{1}{1}$	
ÉTAPE 2 :	$\frac{0}{1}$		$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$		$\frac{1}{1}$	
ÉTAPE 3 :	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{1}$

Démontrer que :

- (i) aucun nombre rationnel ne sera inséré plus d’une fois ;
- (ii) chaque fraction insérée est irréductible ;
- (iii) chaque nombre rationnel entre 0 et 1 sera inséré à une étape quelconque.