PROBLEMS

Solutions to problems in this issue should arrive no later than ***1 November 2013****. An asterisk ($\star$) after a number indicates that a problem was proposed without a solution.*

Each problem is given in English and French, the official languages of Canada. In issues 1, 3, 5, 7, and 9, English will precede French, and in issues 2, 4, 6, 8, and 10, French will precede English. In the solutions' section, the problem will be stated in the language of the primary featured solution.

The editor thanks Jean-Marc Terrier of the University of Montreal for translations of the problems.

Note*: Due to an editorial mix-up, problem 3724 [2012 : 105, 106] already appeared as problem M504 [2011 : 346, 347]. In this issue we replace 3724 with a new problem.*

3724. *Replacement. Proposed by Richard K. Guy, University of Calgary, Calgary, AB.*

The edge-lengths of a cyclic quadrilateral are 7, 8, 4, 1, in that order. What are the lengths of the diagonals?

3741. *Proposed by Péter Ivády, Budapest, Hungary.*

Find the largest value of a and the smallest value of b for which the inequalities

$$\frac{ax}{a+x^2} < \sin x < \frac{bx}{b+x^2},$$

hold for all $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

3742. *Proposed by Michel Bataille, Rouen, France.*

In a scalene triangle ABC, let K, L, M be the feet of the altitudes from A, B, C, and P, Q, R be the midpoints of BC, CA, AB, respectively. Let LM and QR intersect at X, MK and RP at Y, KL and PQ at Z. Show that AX, BY, CZ are parallel.

3743. *Proposed by Bill Sands, University of Calgary, Calgary, AB.*

Two equal circles are tangent to the parabola $y = x^2$ at the same point. One of the circles is also tangent to the x–axis, while the other is tangent to the y– axis. Find the radius of the circles. *This problem was inspired by problem* **3732** *[2012 : 149, 151].*

3744. *Proposed by George Apostolopoulos, Messolonghi, Greece.*

Let a, b, c be positive real numbers with sum 4. Prove that

$$\frac{a^8+b^8}{(a^2+b^2)^2} + \frac{b^8+c^8}{(b^2+c^2)^2} + \frac{c^8+a^8}{(c^2+a^2)^2} + abc \geq a^3+b^3+c^3.$$

3745. *Proposed by Abdilkadir Altintaş, mathematics teacher, Emirdağ, Turkey.*

In the square $ABCD$ the semicircle with diameter AD intersects the quarter circle with centre C and radius CD in the point P. Show that $PB = \sqrt{2}AP$.

3746. *Proposed by Pedro Henrique O. Pantoja, student, UFRN, Brazil.*

Let $Q(n)$ denote the sum of the digits of the positive integer n. Prove that there are infinitely many positive integers n such that

$$Q(n) + Q(n^2) + Q(n^3) = [Q(n)]^2.$$

This is an extension of problem **3506** *[2010 : 45, 47; 2011 : 57, 58].*

3747. *Proposed by Šefket Arslanagić, University of Sarajevo, Sarajevo, Bosnia and Herzegovina.*

Let a, b, c be real numbers with $a + b + c = 0$ and $c \geq 1$. Prove that

$$a^4 + b^4 + c^4 - 3abc \geq \frac{3}{8}.$$

3748★. *Proposed by Nguyen Thanh Binh, Hanoi, Vietnam.*

Given three mutually external circles in general position, there will exist six distinct lines that are common internal tangents to pairs of the circles. Prove that if three of those common tangents, one to each pair of the circles, are concurrent, then the other three common tangents are also concurrent.

3749. *Proposed by Yakub N. Aliyev, Qafqaz University, Khyrdalan, Azerbaijan.*

Let D and E be arbitrary points on the sides BC and AC of a triangle ABC. Prove that

$$\sqrt{[ADE]} + \sqrt{[BDE]} \leq \sqrt{[ABC]},$$

where $[XYZ]$ denotes the area of triangle XYZ.

3750. *Proposed by Michel Bataille, Rouen, France.*

Let $T_k = 1 + 2 + \cdots + k$ be the k^{th} triangular number. Find all positive integers m, n such that $T_m = 2T_n$.

. . . .

3724. *Remplacement. Proposé par Richard K. Guy, Université de Calgary, Calgary, AB.*

Les longueurs des côtés d'un quadrilatère cyclique sont, dans l'ordre, $7, 8, 4, 1$. Quelles sont les longueurs des diagonales ?

3741. *Proposé par Péter Ivády, Budapest, Hongrie.*

Trouver la valeur maximale de a et la valeur minimale de b pour lesquelles les inégalités

$$\frac{ax}{a+x^2} < \sin x < \frac{bx}{b+x^2},$$

sont satisfaites pour tout $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

3742. *Proposé par Michel Bataille, Rouen, France.*

Dans un triangle scalène ABC, soit respectivement K, L, M les pieds des hauteurs issues de A, B, C, et P, Q, R les points milieu de BC, CA, AB. Soit respectivement X, Y et Z les intersections de LM avec QR, MK avec RP, et KL avec PQ. Montrer que AX, BY, CZ sont parallèles.

3743. *Proposé par Bill Sands, Université de Calgary, Calgary, AB.*

Deux cercles égaux sont tangents à la parabole $y = x^2$ au même point. L'un d'eux est aussi tangent à l'axe des x, tandis que l'autre est tangent à l'axe des y. Trouver le rayon de ces cercles. *Ce problème s'inspire du problème* **3732** *[2012 : 149, 151].*

3744. *Proposé par George Apostolopoulos, Messolonghi, Grèce.*

Soit a, b, c trois nombres réels positifs dont la somme est 4. Montrer que

$$\frac{a^8+b^8}{(a^2+b^2)^2} + \frac{b^8+c^8}{(b^2+c^2)^2} + \frac{c^8+a^8}{(c^2+a^2)^2} + abc \geq a^3+b^3+c^3.$$

3745. *Proposé par Abdilkadir Altintaş, mathematics teacher, Emirdağ, Turkey.*

Dans le carré $ABCD$ le demi-cercle de diamètre AD coupe le quart de cercle de centre C et de rayon CD au point P. Montrer que $PB = \sqrt{2}AP$.

3746. *Proposé par Pedro Henrique O. Pantoja, étudiant, UFRN, Brésil.*

On note $Q(n)$ la somme des chiffres du nombre entier positif n. Montrer qu'il existe une infinité d'entiers positifs n tels que

$$Q(n) + Q(n^2) + Q(n^3) = [Q(n)]^2.$$

Ceci est une extension du problème **3506** *[2010 : 45, 47; 2011 : 57, 58].*

3747. *Proposé par Šefket Arslanagić, Université de Sarajevo, Sarajevo, Bosnie et Herzégovine.*

Soit a, b, c trois nombres réels avec $a+b+c=0$ and $c \geq 1$. Montrer que

$$a^4+b^4+c^4-3abc \geq \frac{3}{8}.$$

3748$\star$. *Proposé par Nguyen Thanh Binh, Hanoï, Vietnam.*

Étant donné trois cercles mutuellement extérieurs en position générale, il va exister six droites distinctes, à savoir les tangentes internes communes aux paires de cercles. Montrer que si trois de ces tangentes communes, une pour chaque paire de cercles, sont concourantes, les trois autres sont aussi concourantes.

3749. *Proposé par Yakub N. Aliyev, Université de Qafqaz, Khyrdalan, Azerbaïdjan.*

Soit D et E deux points arbitraires sur les côtés BC et AC d'un triangle ABC. Montrer que

$$\sqrt{[ADE]} + \sqrt{[BDE]} \leq \sqrt{[ABC]},$$

où $[XYZ]$ dénote l'aire du triangle XYZ.

3750. *Proposé par Michel Bataille, Rouen, France.*

Soit $T_k = 1 + 2 + \cdots + k$ le k^{e} nombre triangulaire. Trouver tous les entiers positifs m, n tels que $T_m = 2T_n$.