PROBLEMS

Solutions to problems in this issue should arrive no later than ***1 September 2012****.*
An asterisk ($\star$) *after a number indicates that a problem was proposed without a solution.*

Each problem is given in English and French, the official languages of Canada. In issues 1, 3, 5, and 7, English will precede French, and in issues 2, 4, 6, and 8, French will precede English. In the solutions' section, the problem will be stated in the language of the primary featured solution.

The editor thanks Jean-Marc Terrier of the University of Montreal for translations of the problems.

3650. *Replacement. Proposed by Michel Bataille, Rouen, France.*

Let ABC be a triangle and R, O, G and K its circumradius, circumcentre, centroid and Lemoine point, respectively. Prove that

$$BC \cdot \frac{KA}{GA} = CA \cdot \frac{KB}{GB} = AB \cdot \frac{KC}{GC} = \sqrt{3(R^2 - OK^2)}.$$

Recall that a symmedian of a triangle is the reflection of the median from a vertex in the angle bisector of the same vertex. The Lemoine point of a triangle is the point of intersection of the three symmedians.

3651. *Proposed by Hung Pham Kim, student, Stanford University, Palo Alto, CA, USA.*

Let a, b, and c be nonnegative real numbers such that $a + b + c = 3$. Prove that

$$a^2b + b^2c + c^2a + abc + 4abc(3 - ab - bc - ca) \le 4\,.$$

3652. *Proposed by Ovidiu Furdui, Campia Turzii, Cluj, Romania.*

Let α and β be positive real numbers. Find the value of

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k^\alpha}{n^\beta}\right)\,.$$

3653. *Proposed by Peter Y. Woo, Biola University, La Mirada, CA, USA.*

Let O be the centre of a sphere S circumscribing a tetrahedron $ABCD$. Prove that:

(i) there exists tetrahedra whose four faces are obtuse triangles; and

(ii) if O is inside or on $ABCD$, then at least two faces of $ABCD$ are acute triangles.

3654. *Proposed by Pham Van Thuan, Hanoi University of Science, Hanoi, Vietnam.*

Let a, b, c, and d be nonnegative real numbers such that $a^2+b^2+c^2+d^2 = 1$. Prove that

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + abc + bcd + cda + dab \;\leq\; 1\,.$$

3655. *Proposed by Ovidiu Furdui, Campia Turzii, Cluj, Romania.*

Calculate the integral

$$\int_0^1 \int_0^1 x \left\{ \frac{1}{1 - xy} \right\} dxdy,$$

where $\{a\} = a - \lfloor a \rfloor$ denotes the fractional part of a.

3656. *Proposed by Michel Bataille, Rouen, France.*

Let AB be a fixed chord of an ellipse that is not a diameter and let MN be a variable diameter. Show that the locus of the intersection of MA and NB is an ellipse with the same eccentricity as that of the original ellipse, and find a geometrical description of its centre.

3657. *Proposed by Thanos Magkos, 3rd High School of Kozani, Kozani, Greece.*

Prove that for the angles of any triangle the following inequality holds

$$\frac{\cos^2 A}{1 + \cos^2 A} + \frac{\cos^2 B}{1 + \cos^2 B} + \frac{\cos^2 C}{1 + \cos^2 C} \;\geq\; \frac{1}{2}\,.$$

3658. *Proposed by Ovidiu Furdui, Campia Turzii, Cluj, Romania.*

Let $-\pi < \theta_0 < \theta_1 < \cdots < \theta_k < \pi$ and let a_j, $j = 0, 1, \cdots, k$, be complex numbers. Prove that if

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{k} a_j \cos(\theta_j n) = 0\,,$$

then $a_j = 0$ for all j.

3659. *Proposed by Michel Bataille, Rouen, France.*

Let P be a point on a circle Γ with diameter AB. The tangent to Γ at P intersects the tangents at A and B in D and C, respectively. Let M be any point of the line BC and V the point of intersection of MD and BP. If the parallel to BC through V meets CD in U, show that the line MU is tangent to Γ.

3660. *Proposed by Dragoljub Milošević, Gornji Milanovac, Serbia.*

Triangle ABC has inradius r, circumradius R, and side lengths a, b, c. Prove that

$$\frac{y+z}{x} \cdot \frac{1}{a^2} + \frac{z+x}{y} \cdot \frac{1}{b^2} + \frac{x+y}{z} \cdot \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{Rr}\,,$$

for all positive real numbers x, y and z.

3661. *Proposed by Paul Yiu, Florida Atlantic University, Boca Raton, FL, USA.*

Consider a triangle ABC with the midpoints D, E, F of its sides BC, CA, AB. For an arbitrary point P, let X, Y, Z be the reflections of P in D, E, F respectively. Show that the lines AX, BY, CZ are concurrent.

3662. *Proposed by Michel Bataille, Rouen, France.*

Let $\mathcal{R}$ denote the set of positive integers whose base ten expression is a single repeated digit (e.g. $5 \in \mathcal{R}$, $222 \in \mathcal{R}$, $88888 \in \mathcal{R}$). Let $T(n) = (n-2)^2 + n^2 + (n+2)^2$ where n is a non-negative integer.

(a) Find all even integers n such that $T(n) \in \mathcal{R}$.

(b) Find one odd integer $n > 1$ such that $T(n) \in \mathcal{R}$. Extra credit will be given to anyone who finds more than one odd integer $n > 1$ such that $T(n) \in \mathcal{R}$.

3663. *Proposed by Pedro Henrique O. Pantoja, student, UFRN, Brazil.*

Let a, b, c be positive real numbers. Prove that

$$\sqrt[3]{\frac{2a}{4a+4b+c}} + \sqrt[3]{\frac{2b}{4b+4c+a}} + \sqrt[3]{\frac{2c}{4c+4a+b}} < 2\,.$$

. . . .

3650. *Remplacement. Proposé par Michel Bataille, Rouen, France.*

Soit ABC un triangle et soit respectivement R, O, G et K le rayon et le centre de son cercle circonscrit, son centre de gravité et son point de Lemoine. Montrer que

$$BC \cdot \frac{KA}{GA} = CA \cdot \frac{KB}{GB} = AB \cdot \frac{KC}{GC} = \sqrt{3(R^2 - OK^2)}.$$

Rappelons qu'une symédiane d'un triangle est la réflexion d'une médiane par rapport à la bissectrice issue d'un même sommet. Le point Lemoine d'un triangle est le point d'intersection des trois symédianes.

3651. *Proposé par Pham Kim Hung, étudiant, Université de Stanford, Palo Alto, CA, É-U.*

Soit a, b et c trois nombres réels non négatifs tels que $a + b + c = 3$. Montrer que

$$a^2b + b^2c + c^2a + abc + 4abc(3 - ab - bc - ca) \leq 4\,.$$

3652. *Proposé par Ovidiu Furdui, Campia Turzii, Cluj, Roumanie.*

Soit α et β deux nombres réels positifs. Trouver la valeur de la limite

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^\alpha}{n^\beta}\right).$$

3653. *Proposé par Peter Y. Woo, Université Biola, La Mirada, CA, É-U.*

Soit O le centre d'une sphère S circonscrite à un tétrahèdre $ABCD$. Montrer que

(i) il existe des tétrahèdres dont les quatre faces sont des triangles obtusangles ; et

(ii) si O est à l'intérieur ou sur $ABCD$, alors au moins deux faces de $ABCD$ sont des triangles acutangles.

3654. *Proposé par Pham Van Thuan, Université de Science des Hanoï, Hanoï, Vietnam.*

Soit a, b, c et d quatre nombres réels non négatifs tels que $a^2+b^2+c^2+d^2=1$. Montrer que

$$a^3+b^3+c^3+d^3+abc+bcd+cda+dab\ \le\ 1\,.$$

3655. *Proposé par Ovidiu Furdui, Campia Turzii, Cluj, Roumanie.*

Calculer l'intégrale

$$\int_0^1\int_0^1 x\left\{\frac{1}{1-xy}\right\}dxdy,$$

où $\{a\}=a-\lfloor a\rfloor$ dénote la partie fractionnaire de a.

3656. *Proposé par Michel Bataille, Rouen, France.*

Dans une ellipse, on fixe une corde AB qui ne soit pas un diamètre et soit MN un diamètre variable. Montrer que le lieu du point d'intersection de MA et NB est une ellipse de même excentricité que l'ellipse originale, et trouver une description géométrique de son centre.

3657. *Proposé par Thanos Magkos, 3^{ième} -Collège de Kozanie, Kozani, Grèce.*

Montrer qu'on a l'inégalité suivante

$$\frac{\cos^2 A}{1+\cos^2 A}+\frac{\cos^2 B}{1+\cos^2 B}+\frac{\cos^2 C}{1+\cos^2 C}\ \ge\ \frac{1}{2}\,.$$

pour les angles de n'importe quel triangle.

3658. *Proposé par Ovidiu Furdui, Campia Turzii, Cluj, Roumanie.*

Soit $-\pi < \theta_0 < \theta_1 < \cdots < \theta_k < \pi$ et soit a_j, $j = 0, 1, \cdots, k$, k nombres complexes. Montrer que si

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{k} a_j \cos(\theta_j n) = 0\,,$$

alors $a_j = 0$ pour tout les j.

3659. *Proposé par Michel Bataille, Rouen, France.*

Soit P un point sur un cercle Γ de diamètre AB. La tangente à Γ en P coupe respectivement les tangentes en A et B aux points D et C. Soit M un point quelconque sur la droite BC et V le point d'intersection de MD et BP. Si la parallèle à BC passant par V coupe CD en U, montrer que la droite MU est tangente à Γ.

3660. *Proposé par Dragoljub Milošević, Gornji Milanovac, Serbie.*

Soit a, b, c les longueurs des côtés d'un triangle ABC, r le rayon de son cercle inscrit et R le rayon de son cercle circonscrit. Montrer que

$$\frac{y+z}{x}\cdot\frac{1}{a^2} + \frac{z+x}{y}\cdot\frac{1}{b^2} + \frac{x+y}{z}\cdot\frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{Rr}\,,$$

pour tous les nombres réels positifs x, y et z.

3661. *Proposé par Paul Yiu, Florida Atlantic University, Boca Raton, FL, É-U.*

On considère un triangle ABC et D, E, F les points milieu de ses côtés BC, CA, AB. Pour un point arbitraire P, soit X, Y, Z les réflexions respectives de P par rapport à D, E, F. Montrer que les droites AX, BY, CZ sont concourantes.

3662. *Proposé par Michel Bataille, Rouen, France.*

Soit $\mathcal{R}$ l'ensemble des entiers positifs dont l'écriture en base dix est la répétition d'un seul chiffre (p.ex. $5 \in \mathcal{R}$, $222 \in \mathcal{R}$, $88888 \in \mathcal{R}$). Soit $T(n) = (n-2)^2 + n^2 + (n+2)^2$ où n est un entier non négatif.

(a) Trouver tous les entiers pairs n tels que $T(n) \in \mathcal{R}$.

(b) Trouver un entier impair $n > 1$ tel que $T(n) \in \mathcal{R}$. On donnera un crédit supplémentaire à quiconque trouve plus d'un tel entier.

3663. *Proposé par Pedro Henrique O. Pantoja, étudiant, UFRN, Brésil.*

Soit a, b, c trois nombres réels positifs. Montrer que

$$\sqrt[3]{\frac{2a}{4a+4b+c}} + \sqrt[3]{\frac{2b}{4b+4c+a}} + \sqrt[3]{\frac{2c}{4c+4a+b}} < 2\,.$$