PROBLEMS

Solutions to problems in this issue should arrive no later than **1 May 2011**. *An asterisk* ($\star$) *after a number indicates that a problem was proposed without a solution.*

Each problem is given in English and French, the official languages of Canada. In issues 1, 3, 5, and 7, English will precede French, and in issues 2, 4, 6, and 8, French will precede English. In the solutions' section, the problem will be stated in the language of the primary featured solution.

The editor thanks Jean-Marc Terrier of the University of Montreal for translations of the problems.

3576. *Proposed by Mehmet Şahin, Ankara, Turkey.*

Let ABC be a triangle with interior points D, E, F such that $\angle FAB = \angle EAC$, $\angle FBA = \angle DBC$, $\angle DCB = \angle ECA$, $AF = AE$, $BF = BD$, and $CD = CE$. If R is the circumradius of ABC, r is the circumradius of EDF, and s is the semiperimeter of ABC, prove that the area of triangle EDF is $\frac{sr^2}{2R}$.

3577. *Proposed by Mehmet Şahin, Ankara, Turkey.*

Let H be the orthocentre of the acute triangle ABC with A' on the ray HA and such that $A'A = BC$. Define B', C' similarly. Prove that

$$\text{Area}(A'B'C') \;=\; 4\text{Area}(ABC) \;+\; \frac{a^2+b^2+c^2}{2}\,.$$

3578. *Proposed by Ovidiu Furdui, Campia Turzii, Cluj, Romania.*

Let $a > 0$ and $b > 1$ be real numbers and let $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ be a continuous function. Find

$$\lim_{n\to\infty} n^{a/b} \int_0^1 \frac{f(x)}{1+n^a x^b}\,dx\,.$$

3579. *Proposed by Peter Y. Woo, Biola University, La Mirada, CA, USA.*

Let $\alpha = \frac{\pi}{13}$ and

$$\begin{aligned}
x_1 &= \tan(4\alpha) + 4\sin(\alpha) \;=\; -\tan(\alpha) + 4\sin(3\alpha)\,,\\
x_2 &= \tan(\alpha) + 4\sin(\alpha) \;=\; -\tan(4\alpha) + 4\sin(3\alpha)\,,\\
x_3 &= \tan(6\alpha) - 4\sin(6\alpha) \;=\; \tan(2\alpha) + 4\sin(5\alpha)\,.
\end{aligned}$$

Prove that the length x_1 can be constructed with compass and straightedge and determine whether or not the same is true for x_2 and x_3.

3580. *Proposed by Ovidiu Furdui, Campia Turzii, Cluj, Romania.*

Let $k > 0$ and $m \geq 0$ be real numbers, and let $\{a\} = a - \lfloor a \rfloor$ denote the fractional part of a. Calculate

$$\int_0^1 \left\{ \frac{1}{x^k} - \frac{1}{(1-x)^k} \right\} x^m (1-x)^m \, dx \,.$$

3581. *Proposed by Zhi-min Song, Beizhen Middle School, Shandong Binzhou, China and Li Yin, Binzhou University, Shandong, China.*

Let a, b, c, d be positive reals with $0 < a \leq b \leq c \leq d$. Prove that

$$\frac{1}{a(1+b)} + \frac{1}{b(1+c)} + \frac{1}{c(1+d)} + \frac{1}{d(1+a)} \geq \frac{4}{\sqrt[4]{abcd}(1+\sqrt[4]{abcd})} \,.$$

3582. *Proposed by Panagiote Ligouras, Leonardo da Vinci High School, Noci, Italy.*

Let Γ_1, Γ_2 be circles of radius r with centres A, B (respectively), let $\{C, D\} = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$, and suppose that $\angle BCA = 90^\circ$. A line through C intersects Γ_1 and Γ_2 again at E and F, respectively. The circle Γ with centre O and radius R passes through points E and F. A second line passes through C, is perpendicular to the segment EF, and intersects the circle Γ in G and H. Prove that $CH^2 + CG^2 = 4(R^2 - r^2)$.

3583. *Proposed by Paolo Perfetti, Dipartimento di Matematica, Università degli studi di Tor Vergata Roma, Rome, Italy.*

Let α and β be nonnegative real numbers and define

$$\begin{aligned} a_n &= \big(n + \ln(n+1)\big) \prod_{k=1}^{n} \frac{\alpha + k + \ln k}{\beta + (k+1) + \ln(k+1)} \,, \\ p_n &= \big(\alpha + n + 1 + \ln(n+1)\big) \prod_{k=1}^{n} \frac{\alpha + k + \ln k}{\beta + (k+1) + \ln(k+1)} \,. \end{aligned}$$

Find those nonnegative real numbers α and β for which $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converges, and determine the relation between α and β that ensures that

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n - p_n \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \right) = (\alpha+1)(\alpha + 2 + \ln 2) - \frac{(\alpha+1)^2}{2} \,.$$

3584. *Proposed by Šefket Arslanagić, University of Sarajevo, Sarajevo, Bosnia and Herzegovina.*

Let ABC be a triangle with inradius r, side lengths a, b, c and medians m_a, m_b, m_c. Prove that $\frac{c}{m_a^2 m_b^2} + \frac{a}{m_b^2 m_c^2} + \frac{b}{m_c^2 m_a^2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{27r^3}$.

3585. *Proposed by Arkady Alt, San Jose, CA, USA.*

Let $T_n(x)$ be the Chebyshev polynomial of the first kind defined by the recurrence $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$ for $n \geq 1$ and the initial conditions $T_0(x) = 1$ and $T_1(x) = x$. Find all positive integers n such that

$$T_n(x) \leq (2^{n-2}+1)x^n - 2^{n-2}x^{n-1}, \quad x \in [1,\infty).$$

3586. *Proposed by Shai Covo, Kiryat-Ono, Israel.*

For each positive integer n, a_n is the number of positive divisors of n of the form $4m+1$ minus the number of positive divisors of n of the form $4m+3$ (so $a_4 = 1$, $a_5 = 2$, and $a_6 = 0$). Evaluate the sum $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{a_n}{n}$.

3587★. *Proposed by Ignotus, Colegio Manablanca, Facatativá, Colombia.*

Define the *prime graph* of a set of positive integers as the graph obtained by letting the numbers be the vertices, two of which are joined by an edge if and only if their sum is prime.

(a) Prove that given any tree T on n vertices, there is a set of positive integers whose prime graph is isomorphic to T.

(b) For each positive integer n, determine $t(n)$, the smallest number such that for any tree T on n vertices, there is a set of n positive integers each not greater than $t(n)$ whose prime graph is isomorphic to T.

. . . .

3576. *Proposé par Mehmet Şahin, Ankara, Turquie.*

Soit D, E et F trois points à l'intérieur d'un triangle ABC de sorte que $\angle FAB = \angle EAC$, $\angle FBA = \angle DBC$, $\angle DCB = \angle ECA$, $AF = AE$, $BF = BD$ et $CD = CE$. Si R et r sont respectivement les rayons du cercle exinscrit de ABC et de EDF, et s le demi-périmètre de ABC, montrer que l'aire du triangle EDF est $\frac{sr^2}{2R}$.

3577. *Proposé par Mehmet Şahin, Ankara, Turquie.*

Soit H l'orthocentre du triangle acutangle ABC avec A' sur la demi-droite HA et tel que $A'A = BC$. On définit B' et C' de manière analogue. Montrer que

$$\text{Aire}(A'B'C') = 4\text{Aire}(ABC) + \frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$

3578. *Proposé par Ovidiu Furdui, Campia Turzii, Cluj, Roumanie.*

Soit $a > 0$ et $b > 1$ deux nombres réels et soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Calculer

$$\lim_{n\to\infty} n^{a/b} \int_0^1 \frac{f(x)}{1+n^a x^b}\, dx\,.$$

3579. *Proposé par Peter Y. Woo, Université Biola, La Mirada, CA, É-U.*

Soit $\alpha = \dfrac{\pi}{13}$ et

$$\begin{aligned}
x_1 &= \tan(4\alpha) + 4\sin(\alpha) &&= -\tan(\alpha) + 4\sin(3\alpha)\,,\\
x_2 &= \tan(\alpha) + 4\sin(\alpha) &&= -\tan(4\alpha) + 4\sin(3\alpha)\,,\\
x_3 &= \tan(6\alpha) - 4\sin(6\alpha) &&= \tan(2\alpha) + 4\sin(5\alpha)\,.
\end{aligned}$$

Montrer que la longueur x_1 est constructible avec la règle et le compas, et décider si oui ou non il en va de même pour x_2 et x_3.

3580. *Proposé par Ovidiu Furdui, Campia Turzii, Cluj, Roumanie.*

Soit $k > 0$ et $m \geq 0$ deux nombres réels. On désigne par $\{a\} = a - \lfloor a \rfloor$ la partie fractionnaire de a. Calculer

$$\int_0^1 \left\{\frac{1}{x^k} - \frac{1}{(1-x)^k}\right\} x^m (1-x)^m\, dx\,.$$

3581. *Proposé par Zhi-min Song, École Secondaire Beizhen, Shandong Binzhou, Chine et Li Yin, Université Binzhou, Shandong, Chine.*

Soit a, b, c et d des nombres réels positifs tels que $0 < a \leq b \leq c \leq d$. Montrer que

$$\frac{1}{a(1+b)} + \frac{1}{b(1+c)} + \frac{1}{c(1+d)} + \frac{1}{d(1+a)} \;\geq\; \frac{4}{\sqrt[4]{abcd}(1+\sqrt[4]{abcd})}\,.$$

3582. *Proposé par Panagiote Ligouras, École Secondaire Léonard de Vinci, Noci, Italie.*

Soit Γ_1 et Γ_2 deux cercles de rayon r et de centres respectifs A et B. Soit $\{C,\, D\} = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$ et supposons que $\angle BCA = 90^\circ$. Une droite par C coupe respectivement Γ_1 et Γ_2 en E et F. Le cercle Γ de centre O et de rayon R passe par les points E et F. Une seconde droite passe par C, est perpendiculaire au segment EF et coupe le cercle Γ en G et H. Montrer que $CH^2 + CG^2 = 4(R^2 - r^2)$.

3583. *Proposé par Paolo Perfetti, Département de Mathématiques, Université de Rome, "Tor Vergata", Rome, Italie.*

Soit α et β deux nombres réels non négatifs. On définit

$$a_n = \big(n + \ln(n+1)\big) \prod_{k=1}^{n} \frac{\alpha + k + \ln k}{\beta + (k+1) + \ln(k+1)},$$
$$p_n = \big(\alpha + n + 1 + \ln(n+1)\big) \prod_{k=1}^{n} \frac{\alpha + k + \ln k}{\beta + (k+1) + \ln(k+1)}.$$

Trouver pour quels nombres réels non négatifs α et β la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge et déterminer la relation entre α et β assurant que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n - p_n \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)\right) = (\alpha+1)(\alpha + 2 + \ln 2) - \frac{(\alpha+1)^2}{2}.$$

3584. *Proposé par Šefket Arslanagić, Université de Sarajevo, Sarajevo, Bosnie et Herzégovine.*

Soit respectivement r, a, b, c, m_a, m_b, m_c le rayon du cercle inscrit d'un triangle ABC, la longueur de ses côtés et celle de ses médianes. Montrer que $\frac{c}{m_a^2 m_b^2} + \frac{a}{m_b^2 m_c^2} + \frac{b}{m_c^2 m_a^2} \le \frac{3\sqrt{3}}{27r^3}$.

3585. *Proposé par Arkady Alt, San José, CA, É-U.*

Soit $T_n(x)$ le polynôme de Tchebychev du premier type défini par la récurrence $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$ pour $n \ge 1$ et les conditions initiales $T_0(x) = 1$ et $T_1(x) = x$. Trouver tous les entiers $n > 0$ tels que

$$T_n(x) \le (2^{n-2}+1)x^n - 2^{n-2}x^{n-1}, \quad x \in [1, \infty).$$

3586. *Proposé par Shai Covo, Kiryat-Ono, Israël.*

Pour tout entier positif n, soit a_n le nombre des diviseurs positifs de n de la forme $4m+1$ moins le nombre de ceux ayant la forme $4m+3$ (p.ex. $a_4 = 1$, $a_5 = 2$ et $a_6 = 0$). Evaluer la somme $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{a_n}{n}$.

3587★. *Proposé par Ignotus, Colegio Manablanca, Facatativá, Colombie.*

On définit le *graphe premier* d'un ensemble d'entiers positifs comme le graphe obtenu en considérant les nombres comme des sommets, reliés deux à deux par une arête si et seulement si leur somme est un nombre premier.

(a) Montrer qu'étant donné un arbre quelconque T à n sommets, il existe un ensemble d'entiers positifs dont le graphe premier est isomorphe à T.

(b) Pour chaque entier positif n, trouver le plus petit nombre $t(n)$ tel que, pour tout arbre T à n sommets, il existe un ensemble de n entiers positifs pas plus grands que $t(n)$ et dont le graphe premier est isomorphe à T.