Mayhem Problems

Veuillez nous transmettre vos solutions aux problèmes du présent numéro avant le **premier février 2008**. *Les solutions reçues après cette date ne seront prises en compte que s'il nous reste du temps avant la publication des solutions.*

Chaque problème sera publié dans les deux langues officielles du Canada (anglais et français). Dans les numéros 1, 3, 5 et 7, l'anglais précédera le français, et dans les numéros 2, 4, 6 et 8, le français précédera l'anglais.

La rédaction souhaite remercier Jean-Marc Terrier et Martin Goldstein, de l'Université de Montréal, d'avoir traduit les problèmes.

M307. *Proposé par Neven Jurič, Zagreb, Croatie.*

Deux carrés magiques 4×4 ont la propriété que la somme de chacune de leurs lignes, de chacune de leurs colonnes et de leurs deux diagonales donne le même nombre N. On considère alors, pour chaque carré, la somme des éléments de ses quatre coins. Ces sommes peuvent-elles être différentes ou doivent-elles être égales ? (En d'autre termes, la somme des éléments des quatre coins dépend-elle du carré lui-même ou de la *somme magique* N ?) Déterminer cette somme si elle est constante, ou alors montrer que ces sommes peuvent différer.

M308. *Proposé par Babis Stergiou, Chalkida, Grèce.*

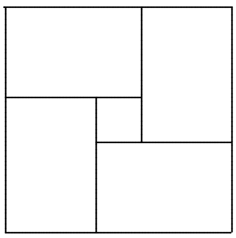
Soit ABC un triangle rectangle avec $A = 90°$, et soit M le point milieu du côté AB. Si D est le pied de la perpendiculaire de A sur CM et N le point milieu de DC, montrer que $BD \perp AN$.

M309. *Proposé par Mihály Bencze, Brasov, Roumanie.*

Déternimer tous les entiers non négatifs possibles x, y, z et t de sorte que $3^x + 3^y + 3^z + 3^t$ soit un cube parfait.

M310. *Proposé par J. Walter Lynch, Athens, GA, É-U.*

Quatre rectangles congruents sont disposés pour former un carré de telle sorte qu'ils entourent un carré plus petit.



Soit S l'aire du carré extérieur et Q celle du carré intérieur. Si l'aire du carré extérieur est 9 fois celle du carré intérieur, déterminer le rapport des côtés des rectangles.

M311. *Proposé par Mihály Bencze, Brasov, Roumanie.*

Soit a, b et c trois nombres réels positifs, et soit $m \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$. Montrer qu'une au moins des équations suivantes possède des solutions réelles :

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + cm &= 0\,, \\ bx^2 + cx + am &= 0\,, \\ cx^2 + ax + bm &= 0\,. \end{aligned}$$

M312. *Proposé par G.P. Henderson, Garden Hill, Campbellcroft, ON.*

Jean est en négotiation avec son banquier sur les termes d'une hypothèque. Ils sont tombés d'accord sur le montant L de celle-ci ainsi que sur un taux annuel d'intérêt de i.

Jean propose «Je veux faire des paiements de P dollars à la fin de chaque année pour les prochaines n années. C'est plus qui n'en faut pour payer les intérêts. L'excédent servira à réduire le principal pour l'année suivante. A la fin des n années, je contracterai une nouvelle hypothèque pour le principal restant.»

Le banquier répond «Je préférerais des paiements plus fréquents. Je suggère des paiements de $P/4$ chaque trimestre avec un intérêt de $i/4$ appliqué sur le solde du trimestre précédent.»

Mais Jean s'objecte «Mais alors le taux annuel effectif sera plus grand que i !»

Le banquier rétorque «Oui, mais le montant restant au temps n sera plus petit !»

Jean trouve cela dur à croire. Est-ce vrai ?

M307. *Proposed by Neven Jurič, Zagreb, Croatia.*

Two 4×4 magic squares have the property that all four of their rows, all four of their columns, and their two diagonals all sum to the same value N. Consider the sum of the four corner elements of each square. Can these sums be different, or must they be the same? (In other words, does the corner sum depend on the square itself, or only on the *magic sum* N?) Either determine the constant sum, or show that these sums can differ.

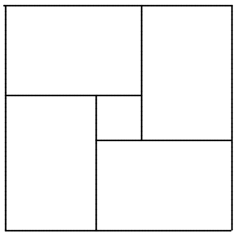
M308. *Proposed by Babis Stergiou, Chalkida, Greece.*

Let ABC be a right triangle with $A = 90^\circ$, and let M be the mid-point of side AB. If D is the foot of the perpendicular from A to CM and N is the mid-point of DC, prove that $BD \perp AN$.

M309. *Proposed by Mihály Bencze, Brasov, Romania.*

Determine all possible non-negative integers x, y, z, and t such that $3^x + 3^y + 3^z + 3^t$ is a perfect cube.

M310. *Proposed by J. Walter Lynch, Athens, GA, USA.*



Four congruent rectangles are arranged in a square pattern so that they enclose a smaller square.

Let S be the area of the outer square and Q the area of the inner square. If the area of the outer square is 9 times the area of the inner square, determine the ratio of the sides of the rectangles.

M311. *Proposed by Mihály Bencze, Brasov, Romania.*

Let a, b, and c be positive real numbers, and let $m \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$. Show that at least one of the following equations has real roots:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + cm &= 0\,, \\ bx^2 + cx + am &= 0\,, \\ cx^2 + ax + bm &= 0\,. \end{aligned}$$

M312. *Proposed by G.P. Henderson, Garden Hill, Campbellcroft, ON.*

John is negotiating the terms of a mortgage with his bank manager. They have agreed that the loan will be for L dollars and that the annual interest rate will be i.

John says, "I will make payments of P dollars at the end of each year for the next n years. This is more than enough to pay the interest. The excess will reduce the principal outstanding for the next year. At the end of n years, I will arrange a new mortgage for the remaining principal."

The manager responds, "I would like more frequent payments. I suggest payments of $P/4$ each quarter-year with interest rate $i/4$ applied to the previous quarter's balance."

John objects, "But then the effective annual interest rate will be greater than i!"

The manager replies, "Yes, but the amount outstanding at time n will be less!"

John finds this hard to believe. Is it true?