PROBLEMS

Toutes solutions aux problèmes dans ce numéro doivent nous parvenir au plus tard le **1er avril 2008**. *Une étoile* ($\star$) *après le numéro indique que le problème a été soumis sans solution.*

Chaque problème sera publié dans les deux langues officielles du Canada (anglais et français). Dans les numéros 1, 3, 5 et 7, l'anglais précédera le français, et dans les numéros 2, 4, 6 et 8, le français précédera l'anglais. Dans la section des solutions, le problème sera publié dans la langue de la principale solution présentée.

La rédaction souhaite remercier Jean-Marc Terrier, de l'Université de Montréal, d'avoir traduit les problèmes.

3263. *Proposé par José Luis Díaz-Barrero, Université Polytechnique de Catalogne, Barcelone, Espagne.*

Les nombres de Fibonacci F_n et les nombres de Lucas L_n sont définis par les récurrences suivantes :

$$\begin{aligned} F_0 &= 0, \quad F_1 = 1, \quad \text{et} \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad \text{pour } n \geq 1; \\ L_0 &= 2, \quad L_1 = 1, \quad \text{et} \quad L_{n+1} = L_n + L_{n-1} \quad \text{pour } n \geq 1. \end{aligned}$$

Soit n un entier positif. Montrer que

$$L_n L_{n+1} \;\leq\; 2 + \left(\sum_{k=1}^{n} L_k F_{2k}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{L_k^2}{\sqrt{F_k}}\,.$$

3264. *Proposé par Virgil Nicula, Bucarest, Roumanie.*

Soit M le point milieu de BC dans le triangle ABC et supposons que la bissectrice intérieure de l'angle BAC coupe BC en N. Montrer que $\angle BAC = 90^\circ + \angle MAN$ si et seulement si $b/c = 1 - 2\cos A$.

3265. *Proposé par Virgil Nicula, Bucarest, Roumanie.*

Soit $ABCD$ un trapèze de côtés parallèles AB et CD avec $AD = CD$ et $AC = BC$, AC et BD se coupant en E. Soit respectivement x, y et z les mesures des angles ABC, BDC et AED. Montrer que $y \leq 30^\circ$,

$$\tan y \;=\; \frac{2\tan x}{3 + \tan^2 x}\,, \quad \text{et} \quad \tan z \;=\; \frac{2\sin x + \sin 3x}{2\cos x + \cos 3x}\,.$$

3266. *Proposé par Michel Bataille, Rouen, France.*

Trouver tous les entiers positifs n ayant la propriété suivante : chaque fois que a et b sont des entiers tels que $ab + 1$ est un multiple de n, il en est de même pour $a + b$.

3267. *Proposé par Michel Bataille, Rouen, France.*

Dans un triangle non équilatéral ABC soit I le centre du cercle inscrit et O celui du cercle circonscrit. Désignons respectivement par X, Y et Z les points milieux de BC, CA et AB. Si $\pi(P)$ représente la projection d'un point P sur la droite OI, et si $\sigma_{MN}(P)$ représente la réflexion du point P par rapport à la droite MN, montrer que

$$\sigma_{YZ} \circ \pi(A) \;=\; \sigma_{ZX} \circ \pi(B) \;=\; \sigma_{XY} \circ \pi(C)\,.$$

3268. *Proposé par Bill Sands et John Wiest, Université de Calgary, Calgary, AB.*

Supposons donné une suite infini de cartes $C_1, C_2, \ldots$. Sur chaque carte est inscrite une série infinie de nombres réels non négatifs dont la somme vaut 1.

(a) Montrer qu'il existe un réarrangement D_1, D_2, $\ldots$, des cartes tel que la série $\sum\limits_{i=1}^{\infty} d_{ii}$ converge, où d_{ii} est le $i^{\text{ième}}$ nombre de la carte D_i.

(b)★ Est-ce qu'il existe un réarrangement tel que $\sum\limits_{i=1}^{\infty} d_{ii} \leq 1$?

[*Ed :* Comparer avec le problème 2620 [2002 : 127 ; 2005 : 319–326].]

3269. *Proposé par Pantelimon George Popescu, Bucarest, Roumanie et José Luis Díaz-Barrero, Université Polytechnique de Catalogne, Barcelone, Espagne.*

Soit n un entier positif. Montrer que

$$\exp\left(\frac{2^n}{n+1}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\exp\binom{n}{k}} \;\geq\; \binom{n+1}{2}\,.$$

3270. *Proposé par Virgil Nicula, Bucarest, Roumanie.*

Soit P un point quelconque à égale distance de deux droites k et ℓ. Soit A et B les projections orthogonales respectives de P sur k et ℓ. Montrer que pour tout $M \in k$ et $N \in \ell$, les énoncés suivants sont équivalents :

(i) $PN \perp BM$;

(ii) $PM \perp AN$;

(iii) $MN^2 = AM^2 + BN^2$.

3271. *Proposé par Virgil Nicula, Bucarest, Roumanie.*

Soit a, b et c nombres réels. Montrer que $|a+b|+|b+c|+|c+a| \leq 2$ si et seulement si $|a| \leq 1$, $|b| \leq 1$, $|c| \leq 1$, et $|a+b+c| \leq 1$.

3272. *Proposé par D.E. Prithwijit, University College Cork, République d'Irlande.*

Trouver tous les nombres naturels a et b tels que $a \mid (b^2 + 1)$ et $b \mid (a^2 + 1)$.

3273. *Proposé par Virgil Nicula, Bucarest, Roumanie.*

Sur les côtés du triangle ABC on dessine des triangles isocèles BMC, CNA et APB avec $MB = MC$, $NC = NA$ et $PA = PB$. Si $\angle BMC + \angle CNA + \angle APB = 360^\circ$, montrer que les angles du triangle MNP sont indépendants du triangle ABC.

3274. *Proposé par Vasile Cîrtoaje, Université de Ploiesti, Roumanie.*

Soit a, b et c trois nombres réels non négatifs. Montrer que

$$\frac{a^3}{2a^2+b^2} + \frac{b^3}{2b^2+c^2} + \frac{c^3}{2c^2+a^2} \ \geq\ \frac{a+b+c}{3}\,.$$

3275. *Proposé par Vasile Cîrtoaje, Université de Ploiesti, Roumanie.*

Soit x, y et z trois nombres réels non négatifs satisfaisant $x+y+z=3$, et soit $0 \leq r \leq 8$. Montrer que

$$\frac{1}{xy^2+r} + \frac{1}{yz^2+r} + \frac{1}{zx^2+r} \ \geq\ \frac{3}{1+r}\,.$$

. . . .

3263. *Proposed by José Luis Díaz-Barrero, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, Spain.*

The Fibonacci numbers F_n and Lucas numbers L_n are defined by the following recurrences:

$$\begin{array}{llll} F_0 = 0\,, & F_1 = 1\,, & \text{and} \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1} & \text{for } n \geq 1; \\ L_0 = 2\,, & L_1 = 1\,, & \text{and} \quad L_{n+1} = L_n + L_{n-1} & \text{for } n \geq 1. \end{array}$$

Prove that for each positive integer n,

$$L_n L_{n+1} \ \leq\ 2 + \left(\sum_{k=1}^{n} L_k F_{2k}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{L_k^2}{\sqrt{F_k}}\,.$$

3264. *Proposed by Virgil Nicula, Bucharest, Romania.*

Let M be the mid-point of BC in $\triangle ABC$, and let the interior angle bisector of $\angle BAC$ meet BC at N. Prove that $\angle BAC = 90^\circ + \angle MAN$ if and only if $b/c = 1 - 2\cos A$.

3265. *Proposed by Virgil Nicula, Bucharest, Romania.*

Let $ABCD$ be a trapezoid with $AB \parallel CD$ for which $AD = CD$ and $AC = BC$, and let E be the intersection of AC and BD. Let x, y, z denote the measures of angles ABC, BDC, AED, respectively. Show that $y \leq 30^\circ$,

$$\tan y \;=\; \frac{2\tan x}{3+\tan^2 x}\,, \quad \text{and} \quad \tan z \;=\; \frac{2\sin x + \sin 3x}{2\cos x + \cos 3x}\,.$$

3266. *Proposed by Michel Bataille, Rouen, France.*

Find all positive integers n with the following property: whenever a and b are integers such that $ab+1$ is a multiple of n, then $a+b$ is also a multiple of n.

3267. *Proposed by Michel Bataille, Rouen, France.*

Let ABC be a non-equilateral triangle with circumcentre O and incentre I. Let X, Y, Z be the mid-points of BC, CA, AB, respectively. If $\pi(P)$ represents the projection of a point P onto the line OI, and $\sigma_{MN}(P)$ represents the reflection of the point P in the line MN, prove that

$$\sigma_{YZ} \circ \pi(A) \;=\; \sigma_{ZX} \circ \pi(B) \;=\; \sigma_{XY} \circ \pi(C)\,.$$

3268. *Proposed by Bill Sands and John Wiest, University of Calgary, Calgary, AB.*

You are given an infinite sequence of cards $C_1, C_2, \ldots$, on each of which is written an infinite series of non-negative real numbers which sums to 1.

(a) Prove that there is a reordering D_1, D_2, $\ldots$ of the cards such that the series $\sum\limits_{i=1}^{\infty} d_{ii}$ converges, where d_{ii} is the i^{th} term of the series on card D_i.

(b)★ Is there necessarily a reordering such that $\sum\limits_{i=1}^{\infty} d_{ii} \leq 1$?

[*Ed:* Compare with problem 2620 [2002 : 127; 2005 : 319–326].]

3269. *Proposed by Pantelimon George Popescu, Bucharest, Romania and José Luis Díaz-Barrero, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, Spain.*

Let n be a positive integer. Prove that

$$\exp\left(\frac{2^n}{n+1}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\exp\binom{n}{k}} \;\geq\; \binom{n+1}{2}\,.$$

3270. *Proposed by Virgil Nicula, Bucharest, Romania.*

Let k and ℓ be two straight lines, and let P be any point equidistant from them. Let A and B be the orthogonal projections of P onto k and ℓ, respectively. Prove that, for any $M \in k$ and $N \in \ell$, the following statements are equivalent:

(i) $PN \perp BM$;

(ii) $PM \perp AN$;

(iii) $MN^2 = AM^2 + BN^2$.

3271. *Proposed by Virgil Nicula, Bucharest, Romania.*

Let a, b, and c be real numbers. Prove that $|a+b|+|b+c|+|c+a| \leq 2$ if and only if $|a| \leq 1$, $|b| \leq 1$, $|c| \leq 1$, and $|a+b+c| \leq 1$.

3272. *Proposed by D.E. Prithwijit, University College Cork, Republic of Ireland.*

Characterize all natural numbers a and b such that $a \mid (b^2+1)$ and $b \mid (a^2+1)$.

3273. *Proposed by Virgil Nicula, Bucharest, Romania.*

On the sides of triangle ABC are mounted isosceles triangles BMC, CNA, and APB with $MB = MC$, $NC = NA$, and $PA = PB$. If $\angle BMC + \angle CNA + \angle APB = 360^\circ$, prove that the angles of $\triangle MNP$ are independent of $\triangle ABC$.

3274. *Proposed by Vasile Cîrtoaje, University of Ploiesti, Romania.*

Let a, b, and c be non-negative real numbers. Prove that

$$\frac{a^3}{2a^2+b^2} + \frac{b^3}{2b^2+c^2} + \frac{c^3}{2c^2+a^2} \geq \frac{a+b+c}{3}\,.$$

3275. *Proposed by Vasile Cîrtoaje, University of Ploiesti, Romania.*

Let x, y, and z be non-negative real numbers satisfying $x+y+z=3$, and let $0 \leq r \leq 8$. Prove that

$$\frac{1}{xy^2+r} + \frac{1}{yz^2+r} + \frac{1}{zx^2+r} \geq \frac{3}{1+r}\,.$$