Mayhem Solutions

M238. *Proposé par John Grant McLoughlin, Université du Nouveau-Brunswick, Fredericton, NB.*

Soit PQ une corde d'une parabole et soit R le point milieu de PQ. Soit S un point sur la parabole tel que la tangente en S est parallèle à PQ. Si T désigne le point d'intersection des tangentes en P et Q, montrer que R, S et T sont colinéaires.

Solution par Jean-David Houle, Cégep de Drummondville, Drummondville, QC.

Plaçons la parabole et les points sur un plan cartésien. On choisit nos axes tels que le sommet de la parabole se situe à l'origine. Soit la parabole d'équation $y = ax^2$ et les points $P(p, ap^2)$ et $Q(q, aq^2)$. On va prouver que, sous ces conditions, les points R, S, et T ont la même abscisse, et sont par le fait même colinéaires.

Soit r l'abscisse du point R. Puisque R est le point milieu de la corde joignant P et Q, son abscisse est donc la moyenne de celles des points P et Q ; c'est-à-dire $r = \frac{1}{2}(p+q)$.

Soit s l'abscisse du point S. Puisque la tangente en S et la corde PQ sont parallèles, elles ont la même pente. Nous avons donc l'équation suivante à résoudre pour s :

$$\left.\frac{d(ax^2)}{dx}\right|_{x=s} \;=\; 2as \;=\; \frac{aq^2 - ap^2}{q-p} \;=\; \frac{a(q^2-p^2)}{q-p}\,.$$

Puisque $p \neq q$, on a $2as = a(p+q)$ et on obtient $s = \frac{1}{2}(p+q)$.

Maintenant, on va trouver l'équation des tangentes aux points P et Q. Les dérivées de la parabole aux points P et Q nous donneront les pentes de ces tangentes. Ainsi, les équations des tangentes sont :

$$y \;=\; 2apx - ap^2 \quad \text{et} \quad y \;=\; 2aqx - aq^2\,.$$

Pour trouver l'abscisse t du point T, on résout l'équation suivante pour t :

$$\begin{aligned} 2apt - ap^2 &= 2aqt - aq^2\,, \\ 2at(p-q) &= a(p^2-q^2)\,. \end{aligned}$$

Ainsi, $t = \frac{1}{2}(p+q)$, parce que $p \neq q$.

Donc, les points R, S et T ont la même abscisse $\frac{1}{2}(p+q)$ et sont colinéaires.

En outre résolu par HASAN DENKER, Istanbul, Turquie ; et TITU ZVONARU, Comăneşti, Roumanie. Une solution incorrecte a aussi été soumise.

M239. *Proposed by Yakub N. Aliyev, Baku State University, Baku, Azerbaijan.*

If a, b, $c > 0$, prove that

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a} \;\le\; \frac{(a+b+c)^2}{6abc}\,.$$

Solution by Vedula N. Murty, Dover, PA, USA.

We have $(a+b)^2-4ab=(a-b)^2\ge 0$, and hence, $4ab\le(a+b)^2$. Similarly, $4bc\le(b+c)^2$ and $4ca\le(c+a)^2$. Therefore,

$$\begin{aligned} 4abc\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right) &= \frac{4ab}{a+b}\,c+\frac{4bc}{b+c}\,a+\frac{4ca}{c+a}\,b \\ &\le (a+b)c+(b+c)a+(c+a)b \\ &= 2(ab+bc+ca)\,. \qquad (1) \end{aligned}$$

Using the well-known inequality $ab+bc+ca\le a^2+b^2+c^2$, we obtain

$$\begin{aligned} 3(ab+bc+ca) &\le a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \\ &= (a+b+c)^2\,. \qquad (2) \end{aligned}$$

Combining (1) and (2), we have

$$4abc\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right) \;\le\; \frac{2}{3}(a+b+c)^2\,.$$

Dividing by $4abc$ gives the desired result.

Also solved by MOHAMMED AASSILA, Strasbourg, France; ARKADY ALT, San Jose, CA, USA; MIHÁLY BENCZE, Brasov, Romania; HASAN DENKER, Istanbul, Turkey; RICHARD I. HESS, Rancho Palos Verdes, CA, USA; JEAN-DAVID HOULE, Cégep de Drummondville, Drummondville, QC; BABIS STERGIOU, Chalkida, Greece; and TITU ZVONARU, Comăneşti, Romania.

M240. *Proposé par l'Équipe de Mayhem.*

En utilisant une seule fois chacun des chiffres de 0 à 9, trouver quatre carrés parfaits (positifs) tels qu'il y en ait un de quatre chiffres, un de trois, un de deux et un dernier de un chiffre. (Note : Il y a plus d'une solution. Combien pouvez-vous en trouver ?)

Solution par Jean-David Houle, Cégep de Drummondville, Drummondville, QC.

Évidemment, nous ne devons pas considérer les carrés qui comportent au moins 2 nombres identiques. Sous cette condition, on peut démontrer qu'aucun carré de 1, 2, ou 3 chiffres ne contienne de 0. En rédigeant une table comprenant tous les nombres carrés à considérer (de 1, 2, 3, ou 4 chiffres, sans répétition, et comprenant le chiffre 0 dans le cas des nombres à 4 chiffres), on obtient 37 nombres.

Pour chaque carré à 4 chiffres, on inscrit les carrés à 2 chiffres possibles (ceux dont les chiffres n'apparaissent pas dans le carré à 4 chiffres). Pour chaque paire, on inscrit ensuite les carrés à 1 chiffre qui n'apparaissent pas dans le carré à 4 chiffres ou dans celui à 2 chiffres. En vérifiant si il est possible de trouver un carré à 3 chiffres comprenant les 3 chiffres non-utilisés, on obtient les 4 solutions suivantes : $(9, 81, 576, 2304)$, $(9, 16, 784, 3025)$, $(9, 81, 324, 7056)$, et $(1, 36, 784, 9025)$.

Autres solutions soumises par HASAN DENKER, Istanbul, Turquie ; et TITU ZVONARU, Comăneşti, Roumanie. Une solution incomplète a aussi été soumise.

M241. *Proposed by J. Walter Lynch, Athens, GA, USA.*

Three gunfighters, called Quick, Fast, and Slow, stand one at each vertex of an equilateral triangle. Quick is faster on the draw than Fast, and Fast is faster than Slow. If x intends to fire at y, we will say that x *targets* y. We will assume that if x fires at y, then y will be hit, and that if x and y both target each other, the one who is slower on the draw will be hit before he can fire. A combatant cannot fire once he has been hit.

In the first phase of the confrontation, each combatant targets one of the other two and fires a maximum of one round. No man knows how fast the other two are, and the targeting choices are made randomly and cannot be changed during the first phase.

If two combatants survive the first phase, they face each other in a second phase and the fastest draw wins. If only one combatant survives the first phase, he is the winner (and there is no second phase).

Find the probability that:

(a) Quick survives; (b) Fast survives; (c) Slow survives.

Solution by Richard I. Hess, Rancho Palos Verdes, CA, USA.

There are 8 targeting possibilities in the first round as shown by the table of outcomes below, where Quick, Fast, and Slow are denoted by Q, F, and S, respectively.

Targets for Q, F, and S	[*Ed.:* First Round Survivor]	Final Survivor
F, Q, Q	Slow	Slow
F, Q, F	Quick and Slow	Quick
F, S, Q	None	None
F, S, F	Quick	Quick
S, Q, Q	Fast	Fast
S, Q, F	None	None
S, S, Q	Quick and Fast	Quick
S, S, F	Quick and Fast	Quick

Thus, the probability of survival for Quick is $\frac{1}{2}$, for Fast is $\frac{1}{8}$, and for Slow is $\frac{1}{8}$.

Also solved by Jean-David Houle, Cégep de Drummondville, Drummondville, QC. A solution submitted by Hasan Denker, Istanbul, Turkey used the assumption that the one who is slower on the draw will always be hit before he can fire. In that case, the probability that Quick survives is $\frac{1}{2}$, the probability that Fast survives is $\frac{1}{4}$, and the probability that Slow survives is $\frac{1}{4}$.

M242. *Proposé par Houda Anoun, Bordeaux, France.*

Pour quels nombres naturels x le nombre $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ est-il un carré parfait ?

Solution par Jean-David Houle, Cégep de Drummondville, Drummondville, QC.

Disons que $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

Cas 1. x est un nombre pair.

Notons que

$$\begin{array}{rcl} \left(x^2 + \frac{1}{2}x\right)^2 & = & x^4 + x^3 + \frac{1}{4}x^2 \ < \ f(x) \\ \text{et} \quad \left(x^2 + \frac{1}{2}x + 1\right)^2 & = & x^4 + x^3 + \frac{9}{4}x^2 + x + 1 \ \geq \ f(x)\,, \end{array}$$

alors $\left(x^2 + \frac{1}{2}x\right)^2 < f(x) \leq \left(x^2 + \frac{1}{2}x^2 + 1\right)^2$.

L'égalité survient si $x = 0$. Dans tous les autres cas, le polynôme $f(x)$ est compris entre deux carrés parfaits consécutifs et ne peut donc pas être, lui aussi, un carré parfait.

Cas 2. x est un nombre impair.

Pour $x \geq 5$, on a

$$\begin{array}{rcl} \left(x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right)^2 & = & x^4 + x^3 - \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \ < \ f(x) \\ \text{et} \quad \left(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)^2 & = & x^4 + x^3 + \frac{5}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \ > \ f(x)\,, \end{array}$$

donc $\left(x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right)^2 < f(x) < \left(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)^2$.

Le polynôme $f(x)$ est compris entre deux carrés parfaits consécutifs et ne peut donc pas être, lui aussi, un carré parfait.

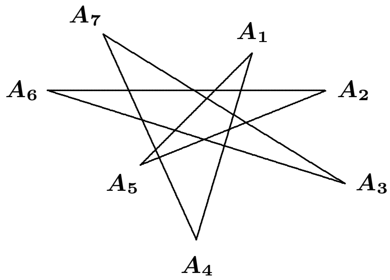
Ceci étant dit, il ne reste qu'à vérifier les valeurs de x qui sont impaires et inférieures à 5. Si $x = 1$, alors $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 5$, qui n'est pas un carré parfait. Si $x = 3$, alors $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 121 = 11^2$, qui donne une solution.

Le seul nombre naturel x satisfaisant l'énoncé est $x = 3$.

Autres solutions soumises par ALINA ALT et ARKADY ALT, San José, CA, É-U; RICHARD I. HESS, Rancho Palos Verdes, CA, É-U; EDWARD T.H. WANG, Université Wilfrid Laurier, Waterloo, ON; et TITU ZVONARU, Comăneşti, Roumanie. Une solution incomplète a aussi été soumise.

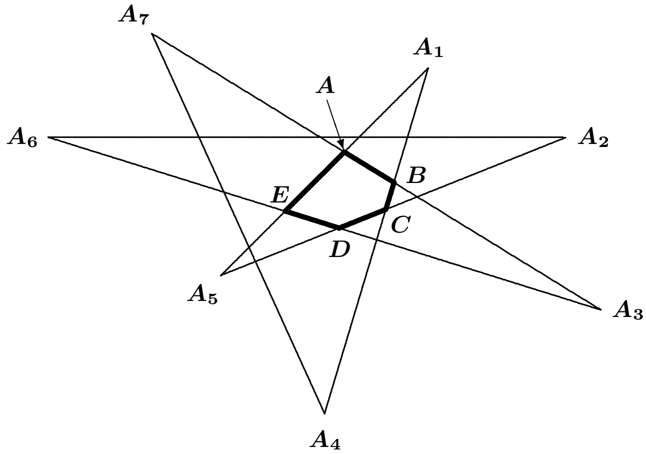
M243. *Proposed by K.R.S. Sastry, Bangalore, India.*

In the 7-point star shown, no three lines are concurrent. Find the sum $A_1 + A_2 + \ldots + A_7$.



Solution by Hasan Denker, Istanbul, Turkey.

The given 7-point star, with no three lines concurrent, generates pentagon $ABCDE$, as shown.



Considering triangles AEA_3, A_7A_4B, A_1A_5C, and A_2A_6D, the following relationships are obtained:

$$\begin{aligned} A + E &= 180^\circ - A_3\,, \\ B &= 180^\circ - A_4 - A_7\,, \\ C &= 180^\circ - A_1 - A_5\,, \\ D &= 180^\circ - A_2 - A_6\,. \end{aligned}$$

Summing these equations, we can then conclude that

$$\begin{aligned} &A + B + C + D + E \\ &\quad = (180^\circ - A_3) + (180^\circ - A_4 - A7) \\ &\qquad\quad + (180^\circ - A_1 - A_5) + (180^\circ - A_2 - A_6) \\ &\quad = 720^\circ - (A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 + A_7)\,. \end{aligned}$$

However, $A + B + C + D + E = 540^\circ$. Hence,

$$540^\circ = 720^\circ - (A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 + A_7)\,.$$

Therefore, $A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 + A_7 = 180^\circ$.

There was one incomplete solution submitted.