PROBLEMS

Toutes solutions aux problèmes dans ce numéro doivent nous parvenir au plus tard le **1er septembre 2007**. *Une étoile* ($\star$) *après le numéro indique que le problème a été soumis sans solution.*

Chaque problème sera publié dans les deux langues officielles du Canada (anglais et français). Dans les numéros 1, 3, 5 et 7, l'anglais précédera le français, et dans les numéros 2, 4, 6 et 8, le français précédera l'anglais. Dans la section des solutions, le problème sera publié dans la langue de la principale solution présentée.

La rédaction souhaite remercier Jean-Marc Terrier et Martin Goldstein, de l'Université de Montréal, d'avoir traduit les problèmes.

We have recently discovered that problem 3188 [2006 : 514, 516] is the same as Mayhem problem M252 [2006 : 264, 265]. We are replacing it in this issue with a new problem. Any solutions for the originally posed problem 3188 will be treated as a solution for Mayhem problem M252. My thanks to Vedula Murty for pointing this out.

3188. Remplacement. *Proposé par José Luis Díaz-Barrero, Université Polytechnique de Catalogne, Barcelone, Espagne.*

Soit z_1, z_2, $\dots$, z_n les zéros du polynôme complexe

$$A(z) \;=\; z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0\,,$$

où $a_0 \neq 0$. Montrer que

$$\det \begin{bmatrix} n & z_1 & z_2 & \cdots & z_n \\ z_1 & 1+z_1^2 & 1 & \cdots & 1 \\ z_2 & 1 & 1+z_2^2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_n & 1 & 1 & \cdots & 1+z_n^2 \end{bmatrix} \;=\; a_1^2\,.$$

3213. *Proposé par Mihály Bencze, Brasov, Roumanie.*

(a) Soit a et b deux nombres réels positifs avec $a < b$ et soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continûment différentiable et strictement monotone. Montrer qu'il existe un nombre réel $c \in (a,b)$ tel que

$$(a+b)f(c) \;=\; af(a) + bf(b)\,.$$

(b)$\star$ Soit a_1, a_2, $\dots$, a_n n nombres réels positifs avec $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ et soi $f : [a_1, a_n] \to \mathbb{R}$ une fonction continûment différentiable et strictement monotone. Montrer qu'il existe un nombre réel $c \in (a_1, a_n)$ tel que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) f(c) \;=\; \sum_{k=1}^{n} a_k f(a_k)\,.$$

3214. *Proposé par Mihály Bencze, Brasov, Roumanie.*

Soit ABC un triangle acutangle.

(a) Montrer que $\dfrac{\tan A}{A} + \dfrac{\tan B}{B} + \dfrac{\tan C}{C} > \left(\dfrac{6}{\pi}\right)^2$.

(b) Montrer que $A \cot A + B \cot B + C \cot C < \left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2$.

(c)★ Déterminer les meilleures constantes $0 < c_2 < c_3 \leq \left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2$ et $c_1 \geq \left(\dfrac{6}{\pi}\right)^2$ telles que

$$\sum_{\text{cyclique}} \frac{\tan A}{A} \;\geq\; c_1 \qquad \text{et} \qquad c_2 \;\leq\; \sum_{\text{cyclique}} A \cot A \;\leq\; c_3\,.$$

3215. *Proposé par Shaun White, étudiant, École Secondaire Vincent Massey, Windsor, ON.*

Soit k, ℓ, et m trois entiers plus grand que 2. On appelle un entier n *expressible* pour (k,ℓ,m) s'il existe des nombres réels positifs a_1, a_2, $\ldots$, a_k tels que $\prod\limits_{i=1}^{k} a_i = 1$ et

$$\sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{\ell} a_{i+j-1} \right)^m \;=\; n\,,$$

où les indices étant pris modulo k.

Supposons que pour un certain triplet (k,ℓ,m) l'entier 1987 n'est pas expressible, tandis que 2005 l'est. Trouver le triplet ordonné (k,ℓ,m).

3216. *Proposé par Mihály Bencze, Brasov, Roumanie.*

Si a, b, c et d sont des entiers positifs, montrer que

$$45\left(\frac{1}{a+b+c+d+1} - \frac{1}{(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)}\right) \leq\; 4 + \sum_{\text{cyclique}} \left[\frac{1}{a+1} + \frac{1}{(a+1)(b+1)}\right].$$

3217. *Proposé par Michel Bataille, Rouen, France.*

Soit $\{L_n\}$ la suite de Lucas définie par $L_0 = 2$, $L_1 = 1$, et, pour $n \geq 1$, $L_{n+1} = L_n + L_{n-1}$. Montrer qu'on a, pour tous les entiers n non négatifs,

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n+1}{2k+1} \frac{L_{2k}}{2^n} \;=\; \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-k}{k} \frac{L_k}{2^{2k}}\,.$$

3218. *Proposé par Ovidiu Furdui, étudiant, Western Michigan University, Kalamazoo, MI, É-U.*

Soit n un entier tel que $n \geq 2$. Dans $\mathbb{R}^n$, soit E l'ensemble des points $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tels que $x_i \geq 0$ pour tous les i et $0 < x_1+x_2+\cdots+x_n \leq 1$. Calculer l'intégrale sur E de la partie fractionnaire de $\dfrac{1}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}$.

3219. *Proposé par Dan Vetter, Regina, SK.*

A l'approche d'une voiture, un vautour (avec une éducation universitaire !) piqueniquant sur la route va toujours s'envoler dans une direction choisie pour maximiser la distance minimale entre lui et la voiture. Montrer que le rapport de la vitesse de la voiture et celle de l'oiseau est $\sec\theta$, où θ est l'angle entre la trajectoire du vautour et la route.

3220. *Proposé par Marian Tetiva, Bîrlad, Roumanie.*

Soit n un entier positif. Montrer qu'on peut trouver une partition de l'ensemble $\{1^2, 2^2, \ldots, n^2\}$ des n premiers carrés parfaits en quatre sous-ensembles, ayant chacun la même somme de leurs éléments, si et seulement si $n = 8k$ ou $n = 8k - 1$, pour un certain entier $k \geq 2$.

3221. *Proposé par Juan-Bosco Romero Márquez, Université de Valladolid, Valladolid, Espagne.*

Soit ABC un triangle de côtés a, b et c opposés respectivement aux angles A, B et C. Soit AH la perpendiculaire au côté BC avec H sur BC. Posons $m = BH$ et $n = CH$. Montrer que $a(bm + cn) - bc(b + c)$ est positif, négatif ou nul, suivant que l'angle A est obtus, aigu ou droit.

3222. *Proposé par Pham Van Thuan, Hanoi University of Science, Hanoi, Vietnam.*

Etant donné des nombres réels positifs a, b et c tels que $a+b+c = 1$, montrer que

$$\frac{(1-a)(1-b)(1-c)}{\left(1-a^2\right)^2 + \left(1-b^2\right)^2 + \left(1-c^2\right)^2} \leq \frac{1}{8}\,.$$

3223. *Proposé par Achilleas Pavlos Porfyriadis, étudiant, American College de Thessalonique "Anatolia", Thessalonique, Grèce.*

Soit a, b et c des nombres réels positifs satisfaisant

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{abc}\,.$$

Montrer que

$$\frac{a}{a^2+1} + \frac{b}{b^2+1} + \frac{c}{c^2+1} \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}\,.$$

3224. *Proposé par J. Chris Fisher et Harley Weston, Université de Regina, Regina, SK.*

Soit $A_0B_0C_0$ un triangle isocèle dont l'angle au sommet A_0 est différent de 120°. On définit une suite de triangles $A_nB_nC_n$ dans laquelle le triangle $A_{i+1}B_{i+1}C_{i+1}$ est obtenu à partir du triangle $A_iB_iC_i$ en prenant la réflexion de chaque sommet par rapport au côté opposé (c.-à-d. B_iC_i est perpendiculaire au segment A_iA_{i+1} et le coupe en son milieu). Montrer que les trois angles tendent vers 60° lorsque $n \to \infty$.

[*Ed :* Ce problème est un cas particulier d'un problème ouvert décrit par Judah Schwartz, "Can technology help us make the mathematics curriculum intellectually stimulating and socially responsible?", *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 4 (1999), pp. 99–119.]

3225★. *Proposé par Panos E. Tsaoussoglou, Athènes, Grèce.*

Soit donné (B, β) un secteur angulaire saillant de sommet B et d'angle β. Soit (A, α) un secteur angulaire saillant dont les côtés ℓ et m coupent ceux de (B, β) en quatre points distincts P, Q, R et S, de sorte que P soit situé entre A et Q d'une part et entre B et S d'autre part.

(a) Si l'angle α est donné, peut-on choisir A et ℓ de telle sorte que

$$[PBQ] + [APS] \;=\; [PQRS]\,,$$

où $[XYZ]$ dénote l'aire du polygone XYZ ?

(b) Quand peut-on construire les droites ℓ et m avec des outils euclidiens de façon à satisfaire la condition (a) pour une valeur de α donnée ?

3188. Replacement. *Proposed by José Luis Díaz-Barrero, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, Spain.*

Let z_1, z_2, ..., z_n be the zeroes of the complex polynomial

$$A(z) \;=\; z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0\,,$$

where $a_0 \neq 0$. Prove that

$$\det \begin{bmatrix} n & z_1 & z_2 & \cdots & z_n \\ z_1 & 1+z_1^2 & 1 & \cdots & 1 \\ z_2 & 1 & 1+z_2^2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_n & 1 & 1 & \cdots & 1+z_n^2 \end{bmatrix} \;=\; a_1^2\,.$$

3213. *Proposed by Mihály Bencze, Brasov, Romania.*

(a) Let a and b be positive real numbers with $a < b$ and let $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ be a continuously differentiable and strictly monotone function. Show that there is a real number $c \in (a, b)$ such that

$$(a + b)f(c) \;=\; af(a) + bf(b)\,.$$

(b)★ Let a_1, a_2, ..., a_n be positive real numbers with $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ and let $f : [a_1, a_n] \longrightarrow \mathbb{R}$ be a continuously differentiable and strictly monotone function. Show that there is a real number $c \in (a_1, a_n)$ such that

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) f(c) \;=\; \sum_{k=1}^{n} a_k f(a_k)\,.$$

3214. *Proposed by Mihály Bencze, Brasov, Romania.*

Let ABC be an acute-angled triangle.

(a) Prove that $\dfrac{\tan A}{A} + \dfrac{\tan B}{B} + \dfrac{\tan C}{C} > \left(\dfrac{6}{\pi}\right)^2$.

(b) Prove that $A\cot A + B\cot B + C\cot C < \left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2$.

(c)★ Determine the best constants $c_1 \geq \left(\dfrac{6}{\pi}\right)^2$ and $0 < c_2 < c_3 \leq \left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2$ such that

$$\sum_{\text{cyclic}} \frac{\tan A}{A} \;\geq\; c_1 \qquad \text{and} \qquad c_2 \;\leq\; \sum_{\text{cyclic}} A\cot A \;\leq\; c_3\,.$$

3215. *Proposed by Shaun White, student, Vincent Massey Secondary School, Windsor, ON.*

Given any integers k, ℓ, m, greater than 2, an integer n is called *expressible* for (k, ℓ, m) if there exist positive real numbers a_1, a_2, ..., a_k such that $\prod\limits_{i=1}^{k} a_i = 1$ and

$$\sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{\ell} a_{i+j-1}\right)^{m} \;=\; n\,,$$

where the subscripts are taken modulo k.

Suppose that for some (k, ℓ, m) the integer 2005 is expressible while 1987 is not. Find the ordered triple (k, ℓ, m).

3216. *Proposed by Mihály Bencze, Brasov, Romania.*

If a, b, c, and d are positive integers, prove that

$$45\left(\frac{1}{a+b+c+d+1}-\frac{1}{(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)}\right) \leq 4+\sum_{\text{cyclic}}\left[\frac{1}{a+1}+\frac{1}{(a+1)(b+1)}\right].$$

3217. *Proposed by Michel Bataille, Rouen, France.*

Let $\{L_n\}$ be the Lucas sequence defined by $L_0 = 2$, $L_1 = 1$, and $L_{n+1} = L_n + L_{n-1}$ for $n \geq 1$. Prove that, for all non-negative integers n, we have

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n+1}{2k+1}\frac{L_{2k}}{2^n} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n-k}{k}\frac{L_k}{2^{2k}}.$$

3218. *Proposed by Ovidiu Furdui, student, Western Michigan University, Kalamazoo, MI, USA.*

Let n be an integer with $n \geq 2$. In $\mathbb{R}^n$, let E be the set of points $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ such that $x_i \geq 0$ for all i and $0 < x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq 1$. Calculate the integral over E of the fractional part of $\dfrac{1}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}$.

3219. *Proposed by Dan Vetter, Regina, SK.*

A vulture with a university education, when approached by a car while dining on the road, will always fly off in a direction chosen to maximize the distance of closest approach of the car. Show that the ratio of the speed of the car to the speed of the bird is $\sec\theta$, where θ is the angle that the vulture's flight path makes with the road.

3220. *Proposed by Marian Tetiva, Bîrlad, Romania.*

Let n be a positive integer. Prove that the set $\{1^2, 2^2, \ldots, n^2\}$ of the first n perfect squares can be partitioned into four subsets each having the same sum of elements if and only if $n = 8k$ or $n = 8k - 1$ for some integer $k \geq 2$.

3221. *Proposed by Juan-Bosco Romero Márquez, Universidad de Valladolid, Valladolid, Spain.*

Let ABC be a triangle with sides a, b, c opposite the angles A, B, C, respectively. Let AH be perpendicular to the side BC with H on BC. Set $m = BH$ and $n = CH$. Prove that $a(bm + cn) - bc(b + c)$ is positive, negative, or zero according as $\angle A$ is obtuse, acute, or right-angled.

3222. *Proposed by Pham Van Thuan, Hanoi University of Science, Hanoi, Vietnam.*

Given positive real numbers a, b, c such that $a + b + c = 1$, prove that

$$\frac{(1-a)(1-b)(1-c)}{\left(1-a^2\right)^2 + \left(1-b^2\right)^2 + \left(1-c^2\right)^2} \;\le\; \frac{1}{8}\,.$$

3223. *Proposed by Achilleas Pavlos Porfyriadis, student, American College of Thessaloniki "Anatolia", Thessaloniki, Greece.*

Let a, b, c be positive real numbers which satisfy

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \;=\; \frac{1}{abc}\,.$$

Prove that

$$\frac{a}{a^2+1} + \frac{b}{b^2+1} + \frac{c}{c^2+1} \;\le\; \frac{3\sqrt{3}}{4}\,.$$

3224. *Proposed by J. Chris Fisher and Harley Weston, University of Regina, Regina, SK.*

Let $A_0B_0C_0$ be an isosceles triangle whose apex angle A_0 is not 120°. We define a sequence of triangles $A_nB_nC_n$ in which $\triangle A_{i+1}B_{i+1}C_{i+1}$ is obtained from $\triangle A_iB_iC_i$ by reflecting each vertex in the opposite side (that is, B_iC_i is the perpendicular bisector of A_iA_{i+1}, and so forth). Prove that all three angles approach 60° as $n \to \infty$.

[*Ed:* This problem is a special case of an open problem described by Judah Schwartz in "Can technology help us make the mathematics curriculum intellectually stimulating and socially responsible?", *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 4 (1999), pp. 99–119.]

3225★. *Proposed by Panos E. Tsaoussoglou, Athens, Greece.*

The sides ℓ and m of an acute angle α with vertex A intersect the sides of a fixed acute angle β with vertex B in four distinct points P, Q, R, and S, labelled so that P lies between A and Q and also between B and S.

(a) If the measure of $\angle\alpha$ is fixed, can A and ℓ be chosen so that

$$[PBQ] + [APS] \;=\; [PQRS]\,,$$

where $[XYZ]$ denotes the area of polygon XYZ?

(b) When are the lines ℓ and m constructible with Euclidean tools to satisfy the condition in part (a) for a given fixed value of α?