Mayhem Problems

Veuillez nous transmettre vos solutions aux problèmes du présent numéro avant le **premier février 2007**. *Les solutions reçues après cette date ne seront prises en compte que s'il nous reste du temps avant la publication des solutions.*

Chaque problème sera publié dans les deux langues officielles du Canada (anglais et français). Dans les numéros 1, 3, 5 et 7, l'anglais précédera le français, et dans les numéros 2, 4, 6 et 8, le français précédera l'anglais.

La rédaction souhaite remercier Jean-Marc Terrier et Martin Goldstein, de l'Université de Montréal, d'avoir traduit les problèmes.

M257. *Proposé par Fabio Zucca, Politecnico di Milano, Milano, Italie.*

Pour un nombre entier positif donné k, on considère l'ensemble des points $\{(x,y)\}$ d'un réseau où x et y sont des entiers tels que $0 \leq x \leq 2k+1$ and $0 \leq y \leq 2k+1$. On choisit deux points de cet ensemble au hasard. Tous les points ont la même probabilité d'être choisis et les points peuvent ne pas être distincts. Trouver la probabilité pour que l'aire du triangle (peut-être dégénéré) formé par ces points et le point $(0,0)$ soit un entier (peut-être 0).

M258. *Proposé par Edward T.H. Wang, Université Wilfrid Laurier, Waterloo, ON.*

Soit c, d et n des entiers tels que $n = c^2 + d^2$. Montrer que $n = (a^2 + b^2)/5$ pour des entiers a et b.

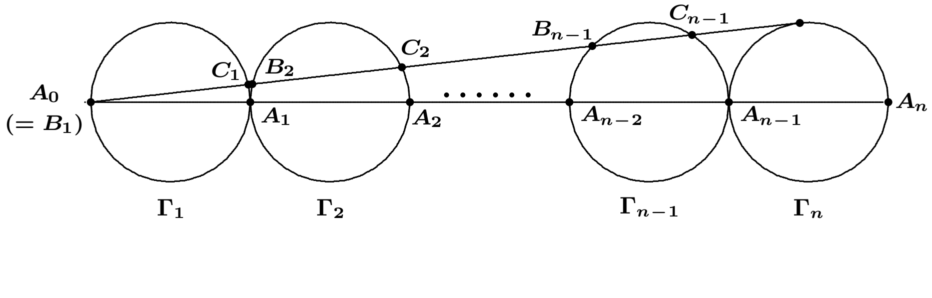
M259. *Proposé par l'Équipe de Mayhem.*

On forme le nombre n par juxtaposition des chiffres de 2^{2006} et de 5^{2006}. Combien de chiffres le nombre n comporte-t-il ?

M260. *Proposé par Bruce Shawyer, Université Memorial de Terre-Neuve, St. John's, NL.*

Sur une droite, on donne dans l'ordre les points A_0, A_1, …, A_n, tous espacés de $2r$. Pour $1 \leq k \leq n$, soit Γ_k le cercle de diamètre $A_{k-1}A_k$. La droite passant par A_0 tangente à Γ_n coupe le cercle Γ_k aux points B_k et C_k, pour $1 \leq k \leq n-1$.

Déterminer la longueur des segments B_kC_k pour $1 \leq k \leq n-1$.



M261. *Proposé par Bruce Shawyer, Université Memorial de Terre-Neuve, St. John's, NL.*

Dans un rectangle $ABCD$, on a $AB = \frac{1}{2}BC$. A l'extérieur du rectangle, on dessine le triangle DCF, où l'angle $DFC = 30°$ et ADF est un segment de droite. Soit E le point milieu de AD.

Déterminer la mesure de l'angle EBF.

M262. *Proposé par Yakub N. Aliyev, Baku State University, Baku, Azerbaijan.*

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pour lesquelles $f(1) = 1$ et telles que $f(x + y) = 3^y f(x) + 2^x f(y)$ pour tous les nombres réels x et y.

M257. *Proposed by Fabio Zucca, Politecnico di Milano, Milano, Italy.*

For a given positive integer k, consider the set of lattice points $\{(x, y)\}$ where x and y are integers such that $0 \leq x \leq 2k + 1$ and $0 \leq y \leq 2k + 1$. Two points are selected at random from this set. All points have the same probability of being selected and the points need not be distinct. Find the probability that the area of the triangle (possibly degenerate) formed by these two points and the point $(0, 0)$ is an integer (possibly 0).

M258. *Proposed by Edward T.H. Wang, Wilfrid Laurier University, Waterloo, ON.*

Let c, d, and n be integers such that $n = c^2 + d^2$. Prove that $n = (a^2 + b^2)/5$ for some integers a and b.

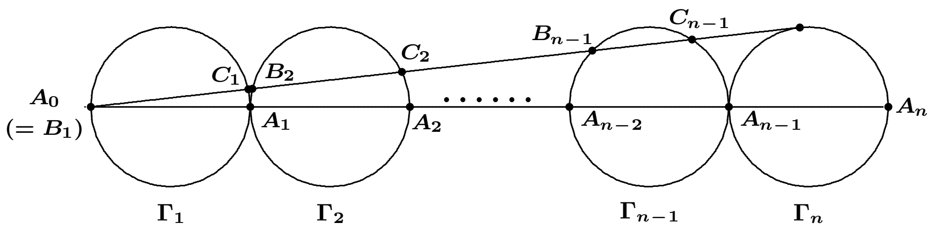
M259. *Proposed by the Mayhem Staff.*

The number n is formed by concatenating the strings of digits formed by the numbers 2^{2006} and 5^{2006}. How many digits does n have?

M260. *Proposed by Bruce Shawyer, Memorial University of Newfoundland, St. John's, NL.*

Points A_0, A_1, $\ldots$, A_n lie on a line, in that order, spaced a uniform distance $2r$ apart. For $1 \leq k \leq n$, let Γ_k be the circle with $A_{k-1}A_k$ as diameter. The line through A_0 tangent to Γ_n intersects the circle Γ_k at the points B_k and C_k, for $1 \leq k \leq n - 1$.

Determine the length of the line segment B_kC_k for $1 \leq k \leq n - 1$.



M261. *Proposed by Bruce Shawyer, Memorial University of Newfoundland, St. John's, NL.*

Rectangle $ABCD$ has $AB = \frac{1}{2}BC$. On the outside of the rectangle, draw $\triangle DCF$, where $\angle DFC = 30^\circ$ and ADF is a straight line segment. Let E be the mid-point of AD.

Determine the measure of $\angle EBF$.

M262. *Proposed by Yakub N. Aliyev, Baku State University, Baku, Azerbaijan.*

Find all functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ for which $f(1) = 1$ and, for all real numbers x and y, we have $f(x+y) = 3^y f(x) + 2^x f(y)$.