PROBLEMS

Toutes solutions aux problèmes dans ce numéro doivent nous parvenir au plus tard le **1er avril 2007**. *Une étoile* ($\star$) *après le numéro indique que le problème a été soumis sans solution.*

Chaque problème sera publié dans les deux langues officielles du Canada (anglais et français). Dans les numéros 1, 3, 5 et 7, l'anglais précédera le français, et dans les numéros 2, 4, 6 et 8, le français précédera l'anglais. Dans la section des solutions, le problème sera publié dans la langue de la principale solution présentée.

La rédaction souhaite remercier Jean-Marc Terrier et Martin Goldstein, de l'Université de Montréal, d'avoir traduit les problèmes.

3163. *Proposé par José Luis Díaz-Barrero, Université Polytechnique de Catalogne, Barcelone, Espagne.*

Calculer

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k^2+n^2}{n^2}\right)^{k}\right)^{\frac{1}{n^2}} .$$

3164. *Proposé par Mihály Bencze, Brasov, Roumanie.*

Soit P un point quelconque dans le plan du triangle ABC. Soit D, E et F les points milieu respectifs des côtés BC, CA et AB. Si G est le centre de gravité du triangle ABC, montrer que

$$0 \;\le\; 3PG+PA+PB+PC-2(PD+PE+PF) \;\le\; \tfrac{1}{2}(AB+BC+CA) .$$

3165. *Proposé par Mihály Bencze, Brasov, Roumanie.*

Montrer que, pour tout entier positif n, il existe un polynôme $P(x)$, de degré au moins $8n$, tel que

$$\sum_{k=1}^{(2n+1)^2} |P(k)| \;<\; |P(0)| .$$

3166. *Proposé par Mihály Bencze et Marian Dinca, Brasov, Roumanie.*

Soit P un point intérieur du triangle ABC. Désignons respectivement par d_a, d_b et d_c les distances entre P et les côtés BC, CA et AB, et par D_A, D_B et D_C les distances entre P et les côtés A, B et C. Finalement, soit P_A, P_B et P_C les mesures respectives des angles BPC, CPA et APB.

Montrer que

$$\begin{aligned} d_a d_b \sin\left(\tfrac{1}{2}(P_A+P_B)\right) + d_b d_c \sin\left(\tfrac{1}{2}(P_B+P_C)\right) + d_c d_a \sin\left(\tfrac{1}{2}(P_C+P_A)\right) \\ \le\; \tfrac{1}{4}(D_B D_C \sin P_A + D_C D_A \sin P_B + D_A D_B \sin P_C) . \end{aligned}$$

3167. *Proposé par Arkady Alt, San Jose, CA, USA.*

Soit ABC un triangle aux angles non obtus et R le rayon de son cercle circonscrit. Si a, b et c sont les longueurs des côtés opposés aux angles respectifs A, B et C, montrer que

$$a\cos^3 A + b\cos^3 B + c\cos^3 C \;\leq\; \frac{abc}{4R^2}\,.$$

3168. *Proposé par Arkady Alt, San Jose, CA, USA.*

Soit x_1, x_2, ..., x_n des nombres réels positifs satisfaisant $\prod\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^n(1+x_i) \;\geq\; \frac{n}{2^{n-1}}\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)\,.$$

3169. *Proposé par Vesselin Dimitrov, National Highschool of Mathematics and Science, Sofia, Bulgarie.*

Soit A un ensemble fini de nombres réels tel que tout $a \in A$ puisse univoquement s'écrire sous la forme $a = b + c$, où b, $c \in A$ et $b \leq c$.

(a) Montrer qu'il existe des éléments distincts $a_1, a_2, \ldots, a_k \in A$, tels que $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = 0$.

(b)★ Le résultat ci-dessus reste-t-il nécessairement vrai si l'on omet l'unicité de la représentation de a comme $a = b + c$?

3170. *Proposé par Mihály Bencze, Brasov, Roumanie.*

Soit a et b deux nombres réels satisfaisant $0 \leq a \leq \frac{1}{2} \leq b \leq 1$. Montrer que

(a) $2(b-a) \leq \cos\pi a - \cos\pi b$;

(b) $(1-2a)\cos\pi b \leq (1-2b)\cos\pi a$.

3171. *Proposé par Paul Yiu, Florida Atlantic University, Boca Raton, FL, USA.*

Étant donné un point P dans le premier quadrant, on sait que le segment (dit de Philon) de longueur minimale, passant par P et joignant les axes de coordonnées n'est pas constructible avec la règle et le compas. Cependant, le segment définissant (avec les deux axes) un triangle dans le premier quadrant, de périmètre minimal, lui, est constructible. Donner une telle construction.

3172. *Proposé par Vincenţiu Rădulescu, Université de Craiova, Craiova, Roumanie.*

Soit f une fonction continue positive définie sur $(0, \infty)$ et telle que $\liminf_{x \to \infty} f(x) > 0$. Montrer qu'il n'existe pas de fonction positive g, deux fois (continuement) différentiable, définie sur $[0, \infty)$ et satisfaisant $g'' + f \circ g = 0$.

3173. *Proposé par Juan-Bosco Romero Márquez, Université de Valladolid, Valladolid, Espagne.*

Soit OAB un triangle rectangle avec l'angle droit en O. Soit OO' la bissectrice l'angle O, avec O' sur AB. Soit D et E les pieds des perpendiculaires respectives abaissées de O' sur les côtés OA et OB. Soit $F = OO' \cap DE$, $G = AE \cap O'D$, et $H = BD \cap O'E$.

Montrer que le triangle FGH est un triangle rectangle isocèle avec l'angle droit en F.

3174. *Proposé par Juan-Bosco Romero Márquez, Université de Valladolid, Valladolid, Espagne.*

Dans un triangle ABC, soit A' le point d'intersection de la bissectrice intérieure de l'angle A avec le côté BC. Soit respectivement B' et C' les pieds des perpendiculaires issues de A' sur les côtés AC et AB. Montrer que BB' et CC' se coupent sur la hauteur issue de A.

3175. *Proposé par D.J. Smeenk, Zaltbommel, Pays-Bas.*

Soit ABC un triangle avec l'angle $B > 90°$ et l'angle $A < 60°$. Soit P un point sur le côté AB de sorte que l'angle $CPB = 60°$. Soit D le point sur CP qui se trouve aussi sur la bissectrice intérieure de l'angle A. Si l'angle $CBD = 30°$, montrer que CP est une droite trisectrice de l'angle ACB.

. . . .

3163. *Proposed by José Luis Díaz-Barrero, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, Spain.*

Calculate

$$\lim_{n \to \infty} \ln \left(\prod_{k=1}^{n} \left(\frac{k^2 + n^2}{n^2} \right)^k \right)^{\frac{1}{n^2}} .$$

3164. *Proposed by Mihály Bencze, Brasov, Romania.*

Let P be any point in the plane of $\triangle ABC$. Let D, E, and F denote the mid-points of BC, CA, and AB, respectively. If G is the centroid of $\triangle ABC$, prove that

$$0 \le 3PG + PA + PB + PC - 2(PD + PE + PF) \le \tfrac{1}{2}(AB + BC + CA) .$$

3165. *Proposed by Mihály Bencze, Brasov, Romania.*

For any positive integer n, prove that there exists a polynomial $P(x)$, of degree at least $8n$, such that

$$\sum_{k=1}^{(2n+1)^2} |P(k)| \;<\; |P(0)|\,.$$

3166. *Proposed by Mihály Bencze and Marian Dinca, Brasov, Romania.*

Let P be an interior point of the triangle ABC. Denote by d_a, d_b, d_c the distances from P to the sides BC, CA, AB, respectively, and denote by D_A, D_B, D_C the distances from P to the vertices A, B, C, respectively. Further let P_A, P_B, and P_C denote the measures of $\angle BPC$, $\angle CPA$, and $\angle APB$, respectively.

Prove that

$$\begin{aligned} & d_a d_b \sin\left(\tfrac{1}{2}(P_A+P_B)\right) + d_b d_c \sin\left(\tfrac{1}{2}(P_B+P_C)\right) + d_c d_a \sin\left(\tfrac{1}{2}(P_C+P_A)\right) \\ & \qquad \le\; \tfrac{1}{4}(D_B D_C \sin P_A + D_C D_A \sin P_B + D_A D_B \sin P_C)\,. \end{aligned}$$

3167. *Proposed by Arkady Alt, San Jose, CA, USA.*

Let ABC be a non-obtuse triangle with circumradius R. If a, b, c are the lengths of the sides opposite angles A, B, C, respectively, prove that

$$a\cos^3 A + b\cos^3 B + c\cos^3 C \;\le\; \frac{abc}{4R^2}\,.$$

3168. *Proposed by Arkady Alt, San Jose, CA, USA.*

Let x_1, x_2, $\ldots$, x_n be positive real numbers satisfying $\prod\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$. Prove that

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^n(1+x_i) \;\ge\; \frac{n}{2^{n-1}}\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)\,.$$

3169. *Proposed by Vesselin Dimitrov, National Highschool of Mathematics and Science, Sofia, Bulgaria.*

Let A be a finite set of real numbers such that each $a \in A$ is uniquely expressible as $a = b + c$, where b, $c \in A$ and $b \le c$.

(a) Prove that there exist distinct elements a_1, a_2, $\ldots$, $a_k \in A$ such that $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = 0$.

(b)★ Does this necessarily hold if it is no longer assumed that each representation $a = b + c$ is unique?

3170. *Proposed by Mihály Bencze, Brasov, Romania.*

Let a and b be real numbers satisfying $0 \leq a \leq \frac{1}{2} \leq b \leq 1$. Prove that

(a) $2(b-a) \leq \cos\pi a - \cos\pi b$;

(b) $(1-2a)\cos\pi b \leq (1-2b)\cos\pi a$.

3171. *Proposed by Paul Yiu, Florida Atlantic University, Boca Raton, FL, USA.*

Given a point P in the first quadrant, it is known that the line segment in the first quadrant joining the coordinate axes, passing through P, and having minimum length (Philo's line) is not constructible using straightedge and compass. However, the line which (together with the two axes) defines a triangle in the first quadrant with minimum perimeter is constructible. Give such a construction.

3172. *Proposed by Vincenţiu Rădulescu, University of Craiova, Craiova, Romania.*

Let f be a positive continuous function defined on $(0,\infty)$ such that $\liminf\limits_{x\to\infty} f(x) > 0$. Prove that there is no positive, twice differentiable function g defined on $[0,\infty)$ which satisfies $g'' + f \circ g = 0$.

3173. *Proposed by Juan-Bosco Romero Márquez, Universidad de Valladolid, Valladolid, Spain.*

Let OAB be a right triangle with right angle at O. Let OO' be the bisector of angle O, with O' on AB. Let D and E be the feet of the perpendiculars from O' to the legs OA and OB, respectively. Let $F = OO' \cap DE$, $G = AE \cap O'D$, and $H = BD \cap O'E$.

Prove that $\triangle FGH$ is an isosceles right triangle with right angle at F.

3174. *Proposed by Juan-Bosco Romero Márquez, Universidad de Valladolid, Valladolid, Spain.*

Given $\triangle ABC$, we define A' to be the point where the internal angle bisector of angle A meets the side BC. Let B' and C' be the feet of the perpendiculars from A' to the sides AC and AB, respectively. Prove that BB' and CC' intersect on the altitude from A.

3175. *Proposed by D.J. Smeenk, Zaltbommel, the Netherlands.*

Let $\triangle ABC$ be a triangle with $\angle B > 90^\circ$ and $\angle A < 60^\circ$. Let P be a point on the side AB such that $\angle CPB = 60^\circ$. Let D be the point on CP which also lies on the interior angle bisector of $\angle A$. If $\angle CBD = 30^\circ$, prove that CP is a trisector of angle ACB.